普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书

高等数学深化训练与大学生数学竞赛教程

（工科类·经管类）

刘　强　陶桂平　梅超群　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作者多年来在大学生数学竞赛辅导和考研辅导经验的基础上编写而成的．全书共分为 13 章，每章包括 4 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练以及深化训练详解．本书编写的目的主要有两个：一是帮助工科类、经管类本科生备考全国大学生数学竞赛，使学生能够在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提升学生综合分析问题、解决问题的能力；二是为了满足工科类、经管类本科生考研的需要. 在例题和习题选编方面，精选了部分有代表性的数学竞赛真题和考研真题，同时注重例题、习题的创新，按题型分类进行合理编排，使学生能够尽快地适应考研题型，从容应对考试.

本书既可以作为普通高等院校工科类、经管类本科生参加全国大学生数学竞赛的辅导用书，也可以作为工科类、经管类本科生考研深化训练用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学深化训练与大学生数学竞赛教程 / 刘强，陶桂平，梅超群编著. —北京：电子工业出版社，2017.4

ISBN 978-7-121-31128-4

I．①高…　II．①刘… ②陶… ③梅…　III．①高等数学－高等学校－教学参考资料　IV．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 057640 号

策划编辑：王二华
责任编辑：王二华
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：24　　字数：620 千字
版　　次：2017 年 4 月第 1 版
印　　次：2017 年 4 月第 1 次印刷
定　　价：56.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010)88254532。

前　　言

为了让学生更好、更快地掌握所学知识，同时结合工科类、经管类本科生参加数学竞赛和报考研究生的需要，应电子工业出版社的邀请，我们编写了高等院校工科类、经管类数学深化训练与考研辅导丛书. 该丛书包括《高等数学深化训练与大学生数学竞赛教程》、《高等数学复习指导与深化训练》、《微积分复习指导与深化训练》、《线性代数复习指导与深化训练》和《概率论与数理统计复习指导与深化训练》等辅导教材，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编.

本书为《高等数学深化训练与大学生数学竞赛教程》分册. 自 1988 年第一届北京市大学生数学竞赛举办以来，到现在北京市数学竞赛已经成功举办了 27 届，每年的数学竞赛都吸引了北京各大高校众多优秀学生积极参与. 北京市数学竞赛也由最初单一的非理科数学竞赛演化到现在包括数学专业、非数学专业、经济管理类，以及高职高专类多层次、多类别的大型赛事. 值得一提的是，自 2010 年首届全国大学生数学竞赛举办以来，到现在已经成功举办了 7 届，全国数学竞赛的推出进一步加快了我国大学生数学竞赛的发展，极大地激发了大学生的数学学习热情，一方面数学竞赛提高了学生的数学学习质量，另一方面也为学生以后参加考研打下了坚实的数学基础.

本书编写的主要目有两个：一是为了满足工科类、经管类本科生参加数学竞赛的需要；二是为了满足工科类、经管类学生考研深化训练的需要.在例题和习题选编方面，作者结合多年来数学竞赛辅导和考研辅导经验，精选了部分有代表性的数学竞赛真题和考研真题，同时注重例题习题的创新，并进行合理编排，使学生能够尽快地适应数学竞赛与考研，从容面对考试. 关于教材的定位，从数学竞赛的角度来看，本教材主要是针对工科类（非数学专业）和经管类大学生数学竞赛而编写的；从考研的角度来看，本教材能够满足数学一和数学三高等数学备考的需要.

全书共分为 13 章，每章包括 4 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解. 具体模块内容为：

1．知识要点 本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容.

2．典型例题分析 本模块创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的数学竞赛真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等脉络对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧.

3．深化训练 本模块精心选编了部分具有代表性的习题以及历年的数学竞赛、考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到融会贯通和举一反三.

4．深化训练详解 本模块对深化训练部分给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维.

本书的第 1～4 章由刘强编写，第 5～7 章由姜玉英编写，第 8～10 章由陶桂平编写，第 11～13 章由梅超群编写，最后由刘强负责统一定稿.

本书在编写过程中，得到了北京工业大学程李高荣教授，北京工商大学曹显兵教授，北方工业大学刘喜波教授，首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授，昆明理工大学吴刘仓教授，北京化工大学李志强副教授，中央财经大学贾尚晖教授，以及首都经济贸易大学聂力副教授、范林元博士等同事的大力支持，电子工业出版社高教分社的谭海平社长也为丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢.

本书可以作为工科类（非数学专业）、经管类数学竞赛的教材，也可以作为高等数学考研的参考用书，同时也可以作为本科生高等数学后继提高课程的教学用书.

为了便于读者学习，工科类要求而经管类不要求的内容用“*”标出；难度较大的题目用“**”标出，初学者可以先略过该内容.

由于作者水平有限，书中仍可能存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行不吝指正. 意见请发至邮箱：cuebliuqiang@163.com.

作　者

2017 年 3 月

目　　录

第 1 章　函　　数

1.1　知 识 要 点

本章内容主要包括实数的分类，实数的绝对值，函数的概念，分段函数与隐函数，函数的四种基本特性，即奇偶性、单调性、周期性和有界性，反函数与复合函数及6大类基本初等函数等.

1.1.1　函数

（1）函数有三要素，即定义域、对应法则和值域．当定义域和对应法则确定以后，值域随之确定.

（2）函数的表示方法主要有公式法、图示法以及表格法等，其中公式法是函数关系表示的一种主要形式.

（3）分段函数是一种特殊的函数，在定义域的不同子集上具有不同表达式.

（4）函数的基本特性主要有四种，即奇偶性、单调性、周期性和有界性.

（5）常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数共6大类函数统称为**基本初等函数**．由基本初等函数经有限次四则运算和(或)复合运算而得到的函数称为初等函数.

几个常见的结论：

（1）$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (|x|\leqslant 1)$；

（2）$\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\dfrac{\pi}{2}$；

（3）$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}(x\neq 0)$.

1.1.2　常用不等式

（1）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

（2）$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a|+|b|$；

（3）$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$；

（4）$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$ ；

（5）当$|x|<\dfrac{\pi}{2}$时，$|\sin x|\leqslant|x|\leqslant|\tan x|$.

1.1.3 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f．如果对于 Z_f 中的每一个 y 值，都存在唯一地满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D_f$ 与之对应，这样确定的以 y 为自变量、以 x 为因变量的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，并记为 $x=f^{-1}(y)$．通常习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此一般将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$．

显然，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 Z_f，值域为 D_f，且对任意的 $y\in Z_f$，有

$$f[f^{-1}(y)]=y,$$

对任意的 $x\in D_f$，有

$$f^{-1}[f(x)]=x.$$

单调函数一定存在反函数，且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是重合的，$y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.4 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\phi(x)$ 的值域为 Z_ϕ，若 $D_f\cap Z_\phi\neq\varnothing$，则称 $y=f[\phi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=\phi(x)$ 的**复合函数**，其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

1.1.5 关于函数表达式的求解

本章一个重要的题型就是函数表达式的求解，数学竞赛中常用的函数表达式的求解方法主要包括：

（1）利用初等函数变换进行求解；
（2）利用函数的连续性进行求解；
（3）利用导数的定义进行求解；
（4）利用不定积分进行求解；
（5）利用定积分的性质进行求解；
（6）利用微分方程进行求解.

1.1.6 一些常用的三角公式

（1）两角和、两角差公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$；

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

（2）和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

（3）积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

（4）倍角公式

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

（5）半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

1.1.7　一些常用的代数公式

（1）级数的部分和公式

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

（2）乘法与因式分解公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$，其中 n 为正整数；

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$，

其中 $C_n^0 = 1, C_n^k = \dfrac{P_n^k}{P_k^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

（3）斯特林公式

$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}}$，其中 $0 < \theta < 1$；

$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，当 n 充分大时；

$\sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{12n-1}\right)$.

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一、函数表达式的求解与证明

例 1.2.1　设 $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - x$, 且 $x \neq 0$，试求 $f(x)$，并求积分 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解　令 $\dfrac{1}{x} = t$，则有

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = 1 - \frac{1}{t},$$

联立方程组

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - x \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \end{cases},$$

从而有

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3x} + \frac{x}{3}.$$

因此

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3x} + \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}\ln 2.$$

注　本题是通过函数的初等变换求解函数的表达式.

例 1.2.2　已知 $f(x) = 2x + 4\sin x \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$，则 $f(x) =$ __________.

解　因为极限值等于某个常数，因此不妨设 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = A$，原题等式两边同时求极限，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2x+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 4A\sin x,$$

即有 $A=\pi+4A$，所以 $A=-\dfrac{\pi}{3}$，从而

$$f(x)=2x-\frac{4\pi}{3}\sin x.$$

例 1.2.3 【2005 年北京市竞赛题】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $A=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=3x-A\sqrt{1-x^2}$，从而

$$f^2(x)=9x^2-6Ax\sqrt{1-x^2}+A^2(1-x^2),$$

等式两边同时取定积分，则有

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 9x^2\mathrm{d}x-6A\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+A^2\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x,$$

因此 $A=3-6A\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}A^2$，求解一元二次方程得 $A=3$ 或 $A=\dfrac{3}{2}$. 故有

$$f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2} \text{ 或 } f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}.$$

例 1.2.4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x^3)=f(x)$，且 $f(0)=1$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

解 对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)=f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=f\left(x^{\frac{1}{9}}\right)=\cdots=f\left(x^{\frac{1}{3^n}}\right),$$

当 $x\neq 0$ 时，因为 $f(x)$ 连续，所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x^{\frac{1}{3^n}}\right)=f(1)$. 又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(1)=f(0)=1$. 从而 $f(x)$ 恒为常数，且 $f(x)=1$.

注 本题是利用函数的连续性求解函数的表达式.

例 1.2.5 【1991 年北京市竞赛题】 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(0)=1$，对于任意的 x 和 y 满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,$$

试求函数 $f(x)$ 的表达式.

解 取 $y=0$，则有 $f(x+0)=f(x)+f(0)$，所以 $f(0)=0$. 又因为

$$f(x+y)-f(x)=f(y)+2xy,$$

从而有

$$\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}+\lim_{y\to0}\frac{2xy}{y},$$

根据导数的定义，$f'(x)=f'(0)+2x=1+2x$，所以 $f(x)=x+x^2+C$，因为 $f(0)=0$，故 $f(x)=x+x^2$.

注　本题是利用导数的定义求解函数的表达式.

例 1.2.6　设对于任意的正整数 n 和任意的实数 x, y，函数 f 满足不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}4^k[f(x+ky)-f(x-ky)]\right|\leqslant 1,$$

试证明函数 f 为常值函数.

证　由于

$$4^n[f(x+ny)-f(x-ny)]=\sum_{k=1}^{n}4^k[f(x+ky)-f(x-ky)]-\sum_{k=1}^{n-1}4^k[f(x+ky)-f(x-ky)],$$

且对任意的 n 有 $\left|\sum_{k=1}^{n}4^k[f(x+ky)-f(x-ky)]\right|\leqslant 1$，因此

$$|4^n[f(x+ny)-f(x-ny)]|\leqslant 2,$$

故

$$|f(x+ny)-f(x-ny)|\leqslant\frac{2}{4^n},$$

对于任意的实数 s 和 t 以及正整数 n，取 $x=\frac{1}{2}(s+t)$ 和 $y=\frac{1}{2n}(s-t)$，则上述不等式化为

$$|f(s)-f(t)|\leqslant\frac{2}{4^n},$$

当 $n\to\infty$ 时，由于 $\frac{2}{4^n}\to 0$，从而有 $f(s)=f(t)$，由 s 和 t 的任意性可知，函数 f 为常值函数.

1.2.2　题型二、复合函数问题

例 1.2.7　设 $f(x)=1-\frac{1}{x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解　$f[f(x)]=1-\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}=-\dfrac{1}{x-1}$,

$$f\{f[f(x)]\}=1-\frac{1}{f[f(x)]}=1-\frac{1}{-\frac{1}{x-1}}=x.$$

例 1.2.8　已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 1\\ 2x+1 & x>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<0\\ x-2 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f\left[g(x)\right]$.

解　根据复合函数的定义，得到

$$f\left[g(x)\right]=\begin{cases}g^2(x) & g(x)\leqslant 1\\ 2g(x)+1 & g(x)>1\end{cases},$$

（1）当 $g(x)\leqslant 1$ 时，则

$$\begin{cases} g(x)=x+3\leqslant 1 \\ x<0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} g(x)=x-2\leqslant 1 \\ x\geqslant 0 \end{cases},$$

从而有 $x\leqslant -2$ 或 $0\leqslant x\leqslant 3$.

（2）当 $g(x)>1$ 时，则

$$\begin{cases} g(x)=x+3>1 \\ x<0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} g(x)=x-2>1 \\ x\geqslant 0 \end{cases},$$

从而有 $-2<x<0$ 或 $x>3$. 综上所述，复合函数为

$$f[g(x)]=\begin{cases} (x+3)^2 & x\leqslant -2 \\ 2x+7 & -2<x<0 \\ (x-2)^2 & 0\leqslant x\leqslant 3 \\ 2x-3 & x>3 \end{cases}.$$

1.2.3 题型三、函数的四种几何特性

例 1.2.9 设 $f(x)=\begin{cases} x+5 & x<1 \\ 2-3x & x>1 \end{cases}$，试讨论函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 的奇偶性.

解 由题意，函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\in R, x\neq 1, x\neq -1\}$，定义域关于 $x=0$ 对称，又因为

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]\ =-g(x),$$

因此函数 $g(x)$ 为奇函数.

注 类似方法可以证明函数 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 为偶函数，且奇偶性与函数 $f(x)$ 的具体表达式没有关系.

例 1.2.10 设 $f(x)=|x\sin x|\cdot \mathrm{e}^{\cos x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是（　　）.

（A）有界函数；　（B）单调函数；　（C）奇函数；　（D）偶函数.

解 假设 $f(x)$ 为有界函数，则存在 $M>0$，使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|f(x)|<M,$$

若取 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，n 为正整数，则有

$$|f(x)|=2n\pi+\frac{\pi}{2}<M,$$

显然当 n 足够大时，上式不成立，因此假设不成立，故 $f(x)$ 为无界函数，选项（A）错误；

由于 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，$f(\pi)=0$，即有 $f(0)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，因此 $f(x)$ 不具有单调性，故选项（B）错误；

由于 $f(-x)=|x\sin x|\cdot \mathrm{e}^{\cos x}=f(x)$，因此 $f(x)$ 为偶函数，故选项（D）正确.

例 1.2.11　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$F(x)=\int_0^x\left(\arctan x-\arctan t-\dfrac{t}{1+t^2}\right)f(t)\mathrm{d}t$. 求证：

（1）若 $f(x)$ 具有奇偶性，则 $F(x)$ 也具有奇偶性，且奇偶性相同；

（2）若 $f(x)$ 单调递增，则 $F(x)$ 单调递减.

证　（1）不妨设 $f(x)$ 为偶函数，令 $u=-t$ ，则

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x}\left(-\arctan x-\arctan t-\frac{t}{1+t^2}\right)f(t)\mathrm{d}t\\&=-\int_0^{x}\left(-\arctan x+\arctan u+\frac{u}{1+u^2}\right)f(-u)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{x}\left(\arctan x-\arctan u-\frac{u}{1+u^2}\right)f(u)\mathrm{d}u=F(x),\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 为偶函数，类似可以证明，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 也为奇函数.

（2）$F(x)=\arctan x\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x\left(\arctan t+\dfrac{t}{1+t^2}\right)f(t)\mathrm{d}t$ ，

则

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\arctan x\cdot f(x)-\arctan x\cdot f(x)-\frac{x}{1+x^2}f(x)\\&=\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{1+x^2}f(x)\ ,\end{aligned}$$

由积分中值定理得，存在 $\xi\in(0,x)$ 或 $\xi\in(x,0)$ ，使得 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf(\xi)$ ，从而

$$F'(x)=\frac{x}{1+x^2}[f(\xi)-f(x)].$$

当 $x>0$ 时，$0<\xi<x$ ，$f(\xi)<f(x)$ ，有 $F'(x)<0$ ；当 $x<0$ 时，$x<\xi<0$ ，$f(\xi)>f(x)$ ，有 $F'(x)<0$ ；因此 $F(x)$ 单调递减.

例 1.2.12　证明函数 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

证　利用反证法. 假设 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界，则存在 $M>0$ ，使得对 $\forall x\in(0,+\infty)$ ，有

$$|x\sin x|<M\ ,$$

取 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ，从而有

$$|x\sin x|=2n\pi+\frac{\pi}{2}<M\ ,$$

显然当 n 足够大时，上式不成立，因此假设不成立，函数 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

例 1.2.13　证明函数 $y=x\cos x$ 不是周期函数.

证　利用反证法.假设 $y=x\cos x$ 是周期函数，则存在 $T>0$ ，使得对 $\forall x\in R$ ，有

$$f(x+T)=f(x)\ .$$

即

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x\ .$$

取 $x=0$，则有 $T\cos T=0$，从而 $\cos T=0$，所以有

$$T=k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

取 $x=T$，则有 $2T\cos(2T)=T\cos T=0$，从而

$$\cos(2T)=0.$$

而 $\cos(2T)=\cos(2k\pi+\pi)=-1$，矛盾. 因此假设不成立，即 $y=x\cos x$ 不是周期函数.

1.3　深 化 训 练

1.3.1　单项选择题

（1）设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(x-2)+f(2x)$ 的定义域为（　　）.

（A）空集；　（B）$[0,2]$；　（C）$[0,4]$；　（D）$[2,4]$.

（2）【2005 年考研题】设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有（　　）.

（A）$F(x)$ 是偶函数的充要条件是 $f(x)$ 为奇函数；

（B）$F(x)$ 是奇函数的充要条件是 $f(x)$ 为偶函数；

（C）$F(x)$ 是周期函数的充要条件是 $f(x)$ 为周期函数；

（D）$F(x)$ 是单调函数的充要条件是 $f(x)$ 为单调函数.

1.3.2　填空题

（1）已知 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ x-6 & 2<x\leqslant 3\end{cases}$，则 $f(x+1)=$________.

（2）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，则 $f[f(x)]=$________，$f[f(x)]$ 的定义域为________.

（3）【1996 年北京市竞赛题】设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，当 $y=1$ 时，$z=x$，则 $f(x)=$________.

（4）【2013 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f\left[\phi(x)\right]=1-x$，且 $\phi(x)\geqslant 0$，则 $\phi(x)=$
________.

（5）设对于 $\forall x\in R$，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且 $f(4)=16$，则 $f(1)=$________.

（6）【2012 年北京市竞赛题】 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{2\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，则 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$________.

1.3.3　已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\ln x-2x^2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$，求 $f(x)$ 的表达式.

1.3.4　求函数 $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}+2$ 的反函数.

1.3.5　判断函数 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的奇偶性.

1.3.6　已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，判断 $F(x)=[f(x)-f(-x)]\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.

1.3.7　试证明：若函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于直线 $x=1$ 和 $x=2$ 对称，则 $f(x)$ 必为周期函数.

1.3.8 讨论函数 $y = x\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否有界.

1.3.9 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为周期函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$，试求 $f(x)$ 的表达式.

1.3.10 对任意的实数 a 和 b，证明不等式 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$.

1.4 深化训练详解

1.3.1 （1）A；

（2）A；**提示** 若 $F(x)$ 是偶函数，则其导函数 $f(x)$ 为奇函数. 反之，若 $f(x)$ 为奇函数，设 $G(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$G(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = G(x),$$

从而 $G(x)$ 为偶函数. $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 都可以表示为 $F(x)=G(x)+C$，从而 $F(-x)=G(-x)+C=G(x)+C=F(x)$，故 $F(x)$ 是偶函数，因此选项（A）正确.

若 $F(x)$ 是奇函数，则其导函数 $f(x)$ 为偶函数. 反之，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 不一定为奇函数，例如取 $f(x)=\cos x$，$F(x)=\sin x+1$，显然 $f(x)$ 为偶函数，但 $F(x)$ 不是奇函数，选项（B）错误.

若取 $f(x)=\cos x$，$F(x)=\sin x+1$，显然 $f(x)$ 为周期函数，但 $F(x)$ 不是周期函数.选项（C）错误.

若取 $f(x)=x$，$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，则知选项（D）错误.

1.3.2 填空题

（1）$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x-5 & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$；

（2）$\dfrac{x+1}{x+2}$；$\{x\,|\,x\in R, x\neq 1, x\neq 2\}$；**提示** 根据复合函数的定义，有

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{x+1}{x+2};$$

$f[f(x)]$ 的定义域满足 $1+x\neq 0$，且 $1+f(x)\neq 0$，因而 $f[f(x)]$ 的定义域为

$$D=\{x\,|\,x\in R, x\neq 1, x\neq 2\}.$$

（3）$x(x+2)$； （4）$\sqrt{\ln(1-x)}$；

（5）1；**提示** 令 $y=x$，则有 $f(2x)=2f(x)+2x^2$，从而 $f(x)=\dfrac{1}{2}f(2x)-x^2$，因此

$$f(1)=\frac{1}{2}f(2)-1,\quad f(2)=\frac{1}{2}f(4)-4,$$

所以 $f(1)=1$.

（6）$\ln^2 x$；**提示** 由于 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\dfrac{2\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，令 $u=\dfrac{1}{t}$，则 $t=\dfrac{1}{u}$，$\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{u^2}\mathrm{d}u$，所以

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-\int_1^x \frac{2\ln u^{-1}}{1+u^{-1}}\cdot\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u=\int_1^x \frac{2\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u,$$

因此

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2\int_1^x\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{t(1+t)}\right)\ln t\,\mathrm{d}t=2\int_1^x\frac{1}{t}\ln t\,\mathrm{d}t=2\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}(\ln t)=\ln^2 x.$$

1.3.3　$f(x)=\ln x-\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^2}$.

1.3.4　令 $2^x=t$，则 $2^{-x}=\dfrac{1}{t}$，因此有

$$(y-2)t+(y-2)\cdot\frac{1}{t}=t-\frac{1}{t},$$

整理得 $t^2=\dfrac{1-y}{y-3}$，从而 $t=\sqrt{\dfrac{1-y}{y-3}}$，即 $2^x=\sqrt{\dfrac{1-y}{y-3}}$，解得

$$x=\log_2\sqrt{\frac{1-y}{y-3}}=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-y}{y-3}\right),$$

因此反函数为

$$y=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-x}{x-3}\right),\quad x\in(1,3).$$

1.3.5　奇函数.

1.3.6　偶函数.

1.3.7　因为 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 和 $x=2$ 对称，因此对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(1+x)=f(1-x),\quad f(2+x)=f(2-x),$$

所以

$$f(x)=f[1+(x-1)]=f[1-(x-1)]=f(2-x)=f(2+x),$$

即对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)=f(x+2)$，因此 $f(x)$ 为周期函数，且周期 $T=2$.

1.3.8　无界，过程略.

1.3.9　设 $f(x)$ 的周期为 T，则对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 和正整数 n，有 $f(x)=f(x+nT)$，从而有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x+nT)=1$.

1.3.10　构造辅助函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$，因此 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，因此有 $f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$，即

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

第 2 章　极限与连续

2.1　知 识 要 点

本章内容主要包括：数列极限的定义与性质，函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算法则，极限存在准则，两个重要极限，函数的连续性，间断点的类型以及闭区间上的连续函数的性质等.

2.1.1　极限的概念与性质

1．极限的概念

极限的概念主要包括数列的极限和函数的极限．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ 的定义为：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立.

函数的极限分为 $x \to \infty$、$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限两种情况，具体为：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists\ M > 0$，当 $|x| > M$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

类似地，可以给出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 以及 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 的定义．两个重要的结论需要读者掌握：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

2．极限的性质

（1）**唯一性**　若极限 $\lim Y$ 存在，则极限值唯一.

（2）**有界性**　如果 $\lim Y$ 存在，则 Y 是局部有界的．特别地，若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，则 $\{u_n\}$ 不仅是局部有界的，而且是全局有界的.

（3）**保号性**　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

（4）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$)，则有 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

（5）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x) \geqslant g(x)$(或 $f(x) \leqslant g(x)$)，则有 $A \geqslant B$(或 $A \leqslant B$).

注　这里变量 Y 既可以表示数列，也可以表示函数，下同.

2.1.2　无穷小量与无穷大量

1．无穷小的概念及其性质

以 0 为极限的变量称为**无穷小**（或**无穷小量**）．需要注意的是，0 是一种特殊的无穷小．无穷小的概念在整个微积分中有着重要的作用，需要读者引起重视．

无穷小有如下性质：

（1）有限个无穷小的代数和是无穷小；

（2）有界变量与无穷小的乘积是无穷小；

（3）$\lim Y = A \Leftrightarrow Y = A+\alpha$，其中 α 是无穷小(与 Y 同在一个变化过程中).

2．无穷小的阶

设 α,β 是同一变化过程中的两个无穷小，则

（1）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**(或 α 是比 β **低阶的无穷小**)，记为 $\beta=o(\alpha)$.

（2）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 是与 α **同阶的无穷小**，记为 $\beta=O(\alpha)$．特殊地，当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是**等价的无穷小**，记为 $\alpha\sim\beta$.

（3）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，则称 β 是关于 α 的 k **阶无穷小**，记为 $\beta=O(\alpha^k)$.

3．等价无穷小量的性质

性质 1　设 α，β，γ 是同一变化过程中的无穷小量，则有

（1）若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$；　　（2）若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$.

性质 2（等价无穷小量替换定理）　设 α，β，$\bar\alpha$ 和 $\bar\beta$ 是同一变化过程中的无穷小量，且 $\alpha\sim\bar\alpha$，$\beta\sim\bar\beta$，$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$ 存在，则有

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\bar\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\bar\beta}=\lim\frac{\bar\alpha}{\bar\beta}.$$

4．常见的等价无穷小量

当 $x\to 0$ 时，有

（1）$\sin x\sim x$；　　（2）$\arcsin x\sim x$；

（3）$\tan x\sim x$；　　（4）$\arctan x\sim x$；

（5）$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；　　（6）$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$；

（7）$\ln(1+x)\sim x$；　　（8）$\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}$　$(a>0,a\neq 1)$；

（9）$\mathrm{e}^x-1\sim x$；　　（10）$a^x-1\sim x\ln a$　$(a>0,a\neq 1)$；

（11）$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\cdot x$　　（12）$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$；

（13）$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$（为（12）式的特殊情况）.

5．无穷大量

本质上，无穷大量 Y 的极限是不存在的，但由于其变化趋势是明显的，故借用极限的记号，将其记为 $\lim Y=\infty$ 或 $Y\to\infty$．由于无穷大量的极限不存在，因此关于无穷大量的问题往往转换为无穷小量去讨论．

无穷大量的具体定义可以分为如下三种情况：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n|>M$ 成立．

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists\ X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|>M$ 成立．

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$ 成立．

注意无穷大量与无界变量的区别　无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量．

例如，$a_n=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ n, & n=2k\end{cases}$（其中 k 为正整数）为无界变量，但当 $n\to\infty$ 时不是无穷大量（为什么？）．

2.1.3　四个极限存在准则与两个重要极限

1．极限存在准则

准则 1　夹逼定理

如果变量 X,Y,Z 满足 $X\leqslant Y\leqslant Z$，且 $\lim X=\lim Z=A$（A 为某常数），那么 $\lim Y$ 也存在且 $\lim Y=A$．

准则 2　单调有界数列必有极限．

准则 3　数列 $\{u_n\}$ 与子数列 $\{u_{n_k}\}$ 之间的关系

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow$ 对 $\{u_n\}$ 的任何子数列 $\{u_{n_k}\}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$．

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=A$．

（3）当 $\{u_n\}$ 是单调数列时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow$ 存在某个子数列 $\{u_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$．

准则 4　海涅（Heine）定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任何数列 $\{x_n\}$，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，且 $x_n\neq x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$．

Heine 定理给出了数列极限与函数极限之间的关系．

2．两个重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．该极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$．

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或者 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$．该极限属于 1^∞ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$．

2.1.4　几个重要的结论

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ 1 & a=1 \\ \text{不存在} & \text{其他} \end{cases}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & n<m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & n=m \\ \infty & n>m \end{cases}$，　(其中 $a_n \neq 0, b_m \neq 0$)；

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (有限，$+\infty$ 或 $-\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$；

（4）若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限都存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = AB .$$

（5）当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$；

（6）$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2.1.5　施笃兹（O.Stolz）定理

定理 1　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，且数列 $\{b_n\}$ 严格单调递减，若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ 存在（或等于 $+\infty$，或 $-\infty$），则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 存在（或等于 $+\infty$，或 $-\infty$），且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} .$$

定理 2　设数列 $\{b_n\}$ 严格单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ 存在（或等于 $+\infty$，或 $-\infty$），则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 存在（或等于 $+\infty$，或 $-\infty$），且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} .$$

施笃兹定理相当于数列极限的洛必达法则.

2.1.6　柯西（Cauchy）定理

设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有定义，且内闭有界（即对于任意的 $[c, d] \subset (a, +\infty)$，函数 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上有界），若 $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - f(x-1)] = A$（或 $+\infty$，或 $-\infty$），则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A\ （或 +\infty，或 -\infty）.$$

2.1.7 关于函数的连续性

函数的连续性是通过极限定义的，因此判断函数是否连续及判断函数间断点的类型，本质上仍是求极限. 因为初等函数在其定义区间上总是连续的，因此讨论函数的连续性主要针对非初等函数而言，例如，在讨论分段函数的连续性时，只需要讨论函数在分段点处的连续性即可.

闭区间上的连续函数有一些很好的性质，例如，有界性定理、最值定理、介值定理及零点定理，这些都需要读者好好掌握.

2.1.8 求极限的常用方法

（1）利用极限的四则运算法则. 往往结合对函数的恒等变形，常用的方法有：因式分解、通分、有理化、三角恒等变形等；

（2）利用无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量之间的关系（特别是利用有界变量与无穷小量的积仍是无穷小量的性质）等；

（3）利用等价无穷小量的性质；

（4）利用高阶无穷小量的性质；

（5）利用四个极限存在准则；

（6）利用两个重要极限；

（7）利用极限与左、右极限的关系（适用于求分段函数在分段点处的极限以及用定义求极限等情形）；

（8）利用施笃兹定理求数列极限；

（9）利用连续性（适用于求函数在其连续点处的极限）；

（10）利用导数定义求极限（见第 3 章）；

（11）利用泰勒公式求极限（见第 4 章）；

（12）利用洛必达法则求极限（见第 5 章）；

（13）利用定积分的定义求极限；

（14）利用积分中值定理求极限；

（15）利用级数收敛的必要条件求极限.

2.2 典型例题分析

2.2.1 题型一、利用极限的分析定义求极限

例 2.2.1 设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ (有限，$+\infty$ 或 $-\infty$)，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=A$.

证法 1 利用极限的定义证明.

（1）当 A 为有限数时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，所以对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立. 对于上述 $\varepsilon>0$ 和 N_1，有

$$\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}-A\right|=\left|\frac{(u_1-A)+(u_2-A)+\cdots+(u_n-A)}{n}\right|$$
$$\leqslant\frac{|u_1-A|+\cdots+|u_{N_1}-A|}{n}+\frac{(n-N_1)}{n}\varepsilon,$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_1-A|+\cdots+|u_{N_1}-A|}{n}=0$，所以对于上述 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，有

$$\frac{|u_1-A|+\cdots+|u_{N_1}-A|}{n}<\varepsilon,$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}-A\right|<2\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=A$.

（2）当 A 为 $+\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$，则对 $\forall M>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $u_n>M$．因此当 $n>N_1$ 时，

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{N_1}}{n}+\frac{u_{N_1+1}+\cdots+u_n}{n}$$
$$\geqslant\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{N_1}}{n}+\frac{(n-N_1)M}{n},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{N_1}}{n}+\frac{(n-N_1)M}{n}\right]=M$，故存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{N_1}}{n}+\frac{(n-N_1)M}{n}>\frac{1}{2}M,$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，对于上述 $\forall M>0$，当 $n>N$ 时，有

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}>\frac{1}{2}M,$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=+\infty$．

（3）当 A 为 $-\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=-\infty$，利用类似于（2）的方法可以证明，具体过程略.

证法 2　利用 O.Stolz 定理证明.

设 $a_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，$b_n=n$，则数列 $\{b_n\}$ 严格单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，而极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=A,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A.$$

2.2.2　题型二、利用初等变换方法求极限

例 2.2.2 【1998 年北京市竞赛题】设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

解　由于

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

因此，当 $n\geqslant 3$ 时，

$$x_n=1+\frac{1}{1+1}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\frac{1}{1+1}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\dfrac{1}{1+1}+1=\dfrac{5}{2}$.

例 2.2.3 【2010 年全国竞赛预赛题】设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由于

$$x_n=\frac{1-a}{1-a}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a},$$

当 $|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

例 2.2.4　【2010 年北京市竞赛题】设数列 $\{x_n\}$ 定义如下：

$$x_1=\sqrt{5},\quad x_{n+1}=x_n^2-2,\quad n\geqslant 1,$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}$.

分析　本题证明的关键在于找到合适的递推公式.

解　由于 $x_{n+1}=x_n^2-2$，所以

$$x_{n+1}^2=(x_n^2-2)^2=x_n^4-4x_n^2+4,$$

记 $y_n=x_n^2$，则有 $y_{n+1}=y_n^2-4y_n+4$，即

$$y_{n+1}-4=y_n(y_n-4).$$

由 $x_1=\sqrt{5}$ 可知 $y_1=5$，$y_2=9$，根据数学归纳法容易证明当 $n\geqslant 2$ 时，$y_n>5$. 从而当 $n\geqslant 2$ 时，$y_{n+1}-4>5(y_n-4)$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$. 由前面分析知，对任意的正整数 i，有 $y_{i+1}-4=y_i(y_i-4)$，因此

$$\prod_{i=1}^{n}(y_{i+1}-4)=\prod_{i=1}^{n}y_i(y_i-4),$$

整理得 $y_{n+1}-4=y_1y_2\cdots y_n(y_1-4)$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{y_1y_2\cdots y_n}{y_{n+1}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{y_1y_2\cdots y_n}{y_{n+1}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}}=1.$$

2.2.3　题型三、利用四个极限存在准则求极限

例 2.2.5【2000 年北京市竞赛题】已知 $n\sin\dfrac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\dfrac{1}{n+1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$．

解　利用结论：若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=A$．因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}x_n,$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n+1}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+2)\sin\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}(n+2)\cdot\frac{1}{n+1}=1,$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=1$．

例 2.2.6　【2006 年首都经贸大学竞赛题】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$．

解　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$x^n\cdot\sqrt{x+3}\leqslant x^n\cdot\sqrt{1+3},$$

即

$$x^n\sqrt{3}\leqslant x^n\sqrt{x+3}\leqslant 2x^n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3}x^n\,\mathrm{d}x=\sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x^n\,\mathrm{d}x=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

由夹逼定理可知，原式=0．

例 2.2.7　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$．

解　由于

$$4=(4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 4^{\frac{1}{n}}\cdot 4,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}4\cdot 4^{\frac{1}{n}}=4$，由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4.$$

注　本例题的结论可以推广到一般情况，例如求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_K^n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 K 为某个正整数，$a_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, K$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_K^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{ a_1, a_2, \cdots, a_K \}.$$

例 2.2.8　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}$，其中 $x > 0$.

解　利用例 2.2.7 的结论．当 $0 < x < 1$ 时，原式 $= 1$；当 $x = 1$ 时，原式 $= 1$；当 $x > 1$ 时，原式 $= x$．因此

$$原式 = \begin{cases} 1 & 0 < x \leqslant 1 \\ x & x > 1 \end{cases}.$$

例 2.2.9　证明数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 收敛.

证　由拉格朗日中值定理可知存在一点 $n < \xi < n+1$，使得

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi},$$

从而有

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

而 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减．又因为

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 有下界，由单调收敛准则可知，数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

注　由于数列 $\{a_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C$．事实上，极限 C 是一个无理数，称之为欧拉常数，其值为 $0.57721\cdots$.

例 2.2.10　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0$，$2x_{n+1} = x_n + \frac{4}{x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限值.

证　因为 $2x_{n+1} = x_n + \frac{4}{x_n} \geqslant 2\sqrt{x_n \cdot \frac{4}{x_n}} = 4$，所以 $x_{n+1} \geqslant 2$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界．又

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{2}{x_n} - x_n = \frac{2}{x_n} - \frac{1}{2}x_n = \frac{4 - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0,$$

即有 $x_{n+1} \leqslant x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调收敛准则可知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，等式 $2x_{n+1} = x_n + \frac{4}{x_n}$ 两边同时取极限，有 $2A = A + \frac{4}{A}$，解得 $A = \pm 2$，由保号性可知 $A \geqslant 2$，所以 $A = 2$.

注　单调有界准则是证明数列极限存在的一种常用方法．在具体证明过程中，只需证明数列单调递增有上界，或者单调递减有下界即可．然而该准则只是充分条件，不是必要条件．有些时候，如果数列不是单调的，只能通过一些其他方法进行证明，参见例 2.2.11．

例 2.2.11　【1988 年北京市竞赛题】设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=2$，当 $n\geqslant 2$ 时，$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限值．

分析　由于

$$x_{n+1}-x_n=\left(2+\frac{1}{x_n}\right)-\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}},$$

因此数列 $\{x_n\}$ 不具有单调性，故单调有界准则失效．这里可以利用极限的定义来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性．然而极限的定义只能够验证一个数（例如 A）是不是数列的极限，因此需要我们先找到可能的极限值 A，然后再利用极限定义进行验证．

证　假设数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，等式 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ 两边同时取极限，有

$$A=2+\frac{1}{A},$$

解得 $A=1\pm\sqrt{2}$，根据极限的保号性，由于 $x_{n+1}>2$，所以 $A\geqslant 2$，故 $A=1+\sqrt{2}$．

下面利用数列极限的定义验证 $A=1+\sqrt{2}$ 为 $\{x_n\}$ 的极限值．对于 $\forall\varepsilon>0$，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$|x_n-A|=\left|2+\frac{1}{x_{n-1}}-\left(2+\frac{1}{A}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{A}\right|=\frac{|x_{n-1}-A|}{A\cdot x_{n-1}}<\frac{1}{4}|x_{n-1}-A|,$$

从而由上述递推公式可以得到，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$|x_n-A|<\frac{1}{4^{n-1}}|x_1-A|=\frac{1}{4^{n-1}}\left|2-(1+\sqrt{2})\right|<\frac{1}{4^{n-1}},$$

要使得 $|x_n-A|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{4^{n-1}}<\varepsilon$ 即可，即有 $n>1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 4}$，取 $N=\left[1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 4}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1+\sqrt{2}$．

例 2.2.12　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在．

证　取两个子数列

$$\{x_n^{(1)}\}=\left\{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right\}\text{和}\{x_n^{(2)}\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\},$$

显然满足

$$x_n^{(1)}\neq 0,\lim_{n\to\infty}x_n^{(1)}=0；\quad x_n^{(2)}\neq 0,\lim_{n\to\infty}x_n^{(2)}=0,$$

但是

$$\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=1,$$

$$\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=\sin(n\pi)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=0,$$

由海涅定理可知，极限 $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

****例 2.2.13** 【2011 年全国竞赛预赛题】 若存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+p}-u_n)=\lambda$（$\lambda$ 为有限数），试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

证　记 $A_n^{(i)}=u_{(n+1)p+i}-u_{np+i}$，$i=0,1,\cdots,p-1$，则对某个固定的 i，数列 $\{A_n^{(i)}\}$ 为 $\{u_{n+p}-u_n\}$ 的一个子数列，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_{n-1}^{(i)}}{n-1}=\lambda.$$

又因为

$$A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_{n-1}^{(i)}=u_{np+i}-u_{p+i},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}-u_{p+i}}{n-1}=\lambda$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{p+i}}{n-1}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}}{n-1}=\lambda$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}}{np+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{np+i}=\frac{\lambda}{p}.$$

对于任意的自然数 m 和固定的自然数 p，必存在自然数 n 和 i $(i=0,1,\cdots,p-1)$，使得 $m=np+i$，且 $m\to\infty\Leftrightarrow n\to\infty$，因此

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_m}{m}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}}{np+i}=\frac{\lambda}{p},$$

结论得证.

2.2.4　题型四、利用施笃兹定理求极限

例 2.2.14　设 p 为某个正整数，试证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$.

证　（1）设 $a_n=1^p+2^p+\cdots+n^p$，$b_n=n^{p+1}$，则 $\{b_n\}$ 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，根据施笃兹定理，结合等价无穷小量替换有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}(p+1)}=\frac{1}{p+1}.$$

（2）设 $a_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$，$b_n=(p+1)n^p$，则数列 $\{b_n\}$ 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，根据施笃兹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p+[n^{p+1}-(n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]},$$

由二项式定理可知，

$$(n+1)^{p+1}=n^{p+1}+(p+1)n^p+\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots,$$

$$(n+1)^p=n^p+pn^{p-1}+\cdots,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots}{(p+1)pn^{p-1}+\cdots}=\frac{1}{2}.$$

2.2.5　题型五、利用两个重要极限求极限

例 2.2.15　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 a,b,c 均为正数.

分析　本题属于 1^∞ 类型，常用的方法有两种，一是利用第二个重要极限进行求解，二是利用对数恒等式，将表达式 $f(x)$ 转化为 $e^{\ln f(x)}$ 的形式，再使用洛必达法则或等价无穷小量替换等方法进行求解.

解　由题意

$$原式=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}},$$

利用等价无穷小量替换，于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln b}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln c}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}.$$

例 2.2.16 设 $p(x;n)$ 是自由度为 n 的 t 分布的概率密度函数，$\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数，即 $p(x;n)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}p(x;n)=\varphi(x)$.

解 注意到 $\Gamma(n)=(n-1)!$，根据斯特林公式（见 1.1.7 节）知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n)}{\sqrt{2\pi}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-(n-1)}}=1,$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}\left(\dfrac{n+1}{2}-1\right)^{\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{2\pi}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n-1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}p(x;n)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}=\varphi(x)$.

2.2.6 题型六、利用等价无穷小量替换求极限

例 2.2.17 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{a}\right)^{\frac{n}{\ln n}}$，其中 $a>0$.

解 利用等价无穷小量替换，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{n}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{n}-1}{a}\right)\right]=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n}-1}{a}\right)\\&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{a}\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\frac{1}{n}\ln n}{a}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}.\end{aligned}$$

注 本题属于 1^∞ 类型，利用对数恒等式，将表达式 $f(x)$ 转化为 $\mathrm{e}^{\ln f(x)}$ 的形式，多次使用等价无穷小量替换，综合性较强．这里用到了结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$.

例 2.2.18　【2013 年全国竞赛预赛试题】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$.

解　因为

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left[\pi(\sqrt{1+4n^2}-2n)\right]=\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n},$$

结合连续函数的性质及等价无穷小量替换，有

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\cdot\ln\left(1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]\\
&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]\\
&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]=e^{\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

例 2.2.19　【2005 年北京市竞赛题】 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2^x-1}\ln\left(1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right)=4$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to0}(2^x-1)=0$，因此 $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right)=0$，从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=0$. 利用等价无穷小量替换定理，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{2^x-1}\ln\left(1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{(2^x-1)(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{x\ln2\cdot x^2}=4,$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=2\ln2.$$

2.2.7　题型七、利用中值定理求极限

例 2.2.20　若 $f(x)=x^2[\arctan(2x+1)-\arctan(2x)]$，试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

解　记 $g(x)=\arctan(2x)$，由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi\in\left(x,x+\frac{1}{2}\right)$，使得

$$g\left(x+\frac{1}{2}\right)-g(x)=\arctan(2x+1)-\arctan(2x)=\frac{2}{1+4\xi^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{1+4\xi^2},$$

而

$$\frac{x^2}{1+4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}<f(x)=\frac{x^2}{1+4\xi^2}<\frac{x^2}{1+4x^2},$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{4}$.

注　本题也可以利用函数 $\arctan x$ 的麦克劳林展开式进行求解，请读者自己完成.

例 2.2.21　设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+b} x\arcsin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

解　根据积分中值定理，则至少存在一点 ξ 介于 x 与 $x+b$ 之间，使得

$$\int_x^{x+b} x\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)f(x)\,\mathrm{d}x=b\xi\arcsin\left(\frac{1}{\xi+1}\right)f(\xi),$$

显然当 $x\to+\infty$ 时，$\xi\to+\infty$，因此

$$\text{原式}=\lim_{\xi\to+\infty} b\xi\arcsin\left(\frac{1}{\xi+1}\right)f(\xi)=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{b\xi}{\xi+1}f(\xi)=ab.$$

例 2.2.22　【2005 年北京市竞赛题】　设积分区域为 $D_r=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$，其中 $r\geqslant 0$，则 $\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

解　由二重积分的积分中值定理可知，至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D_r$，使得

$$\iint\limits_{D_r}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\pi r^2,$$

显然当 $r\to0^+$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，所以原式$=\pi$.

例 2.2.23　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

分析　首先我们先看一种错误的解法．错误解法：利用积分中值定理，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\xi=\frac{\pi}{2}\times0=0.$$

上述解法利用了积分中值定理，方法简洁明了，结论也是对的，但过程却是错误的．原因是题解过程中的 ξ 与 n 的取值有关，正确写法应该是 $\xi=\xi(n)$．虽然知道 $0<\sin\xi_n<1$，但是 ξ_n 的变化趋势尚不清楚，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\xi_n$ 存在与否，无法判断．假如该极限存在，其值多少都无法确定（尽管后面的方法能够证明其值为零），故上述方法存在问题.

解法 1　令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，　由于

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}\cos x\\
&=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x\\
&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,
\end{aligned}$$

所以

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

当 n 为偶数时，

$$I_n=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}I_0=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

当 n 为奇数时，

$$I_n=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}I_1=\frac{(n-1)!!}{n!!},$$

因为 $\{I_n\}$ 为单调递减非负数列，因此有 $I_nI_{n+1}\leqslant I_n^2\leqslant I_nI_{n-1}$，从而

$$\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{n!!}{(n+1)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant I_n^2\leqslant\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

整理得

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant I_n^2\leqslant\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

注　根据解法 1 的解题过程容易得出，当 $n\to\infty$ 时，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ 与 $n^{-\frac{1}{2}}$ 是同阶无穷大，同时还可以得到一些重要结论，例如

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{n}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{n+1}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

解法 2　对于任意小的 $\varepsilon>0$，有

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x<\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=0$，所以对于上述 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)<\varepsilon,$$

此时有

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x<2\varepsilon,$$

从而结论得证.

注　解法 2 显然比解法 1 更为简洁．注意到当 $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ 时，$\sin x\to 1$，因此解法 2 的核心思想是对 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ 进行拆分，将 $\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ 进行“无穷小化”．由此还可以给出一个一般性的结论.

命题 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续、严格单调，且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x=0\,.$$

利用上述命题的结论，可以求解一系列极限问题．例如

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\mathrm{e}}\ln^n x\,\mathrm{d}x=0\,;\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^3(\sqrt{x+1}-1)^n\,\mathrm{d}x=0\,;\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=0\,.$$

2.2.8 题型八、利用定积分的定义求极限

例 2.2.24 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n^3}}+\sqrt{\dfrac{n+2}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n+n}{n^3}}\right)$.

解 结合定积分的定义，有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}\ =\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\,,$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x\ =\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\,.$$

例 2.2.25 【2008 年北京市竞赛题】 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{n}{n}}\right].$$

解 记

$$x_n=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{n}{n}}\,,$$

则有

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+1}\leqslant x_n<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n}\,,$$

根据定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=2\ln 2-1\,,$$

由夹逼定理可知，原式 $=2\ln 2-1$.

注 关于 n 项相加的表达式求极限，常用的方法是通分、夹逼定理，以及使用定积分的定

义三种方法，通分方法一般使用于分母相同或大致相同的情况．本题综合运用了夹逼定理和定积分的定义两种方法，具有较高的综合性．

例 2.2.26　【2007 年北京市竞赛题】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}{n+k^{-1}}$.

解　因为

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+k^{-1}}<\frac{1}{n},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}{n+k^{-1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\mathrm{e}^{\frac{k}{n}},$$

根据定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\mathrm{e}-1,$$

因此由夹逼定理可知，原式 $=\mathrm{e}-1$.

2.2.9　题型九、函数的连续性问题

例 2.2.27　【2002 年考研题】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}} & x>0\\ a\mathrm{e}^{2x} & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

解　由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2,\quad f(0)=a\mathrm{e}^0=a,$$

而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $a=-2$.

例 2.2.28　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right]^{1/n}$，其中 $x\geqslant0$，讨论 $f(x)$ 的连续性.

解　当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]^{1/n}=1^0=1,$$

当 $x=1$ 时， $f(x)=2^0=1$；当 $1<x<2$ 时，

$$f(x)=x\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x^n}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]^{1/n}=x\cdot 1^0=x\text{；}$$

当 $x=2$ 时，

$$f(x)=2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^n}+1+1\right]^{1/n}=2\times 2^0=2\text{；}$$

当 $x>2$ 时，

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1\right]^{1/n}=\frac{x^2}{2}.$$

综上，

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x & 1<x\leqslant 2\\ \dfrac{1}{2}x^2 & x>2\end{cases}.$$

由于

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\text{，}\quad \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\text{，}$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处连续，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

例 2.2.29　【2008 年首都经济贸易大学竞赛题】 设常数 $a>0,b>0,c>0$，且

$$A(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ c & x=0\end{cases},$$

（1）讨论 $A(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

（2）讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}A(x)$，$A(-1)$ 以及 $A(1)$ 之间的大小关系.

解　（1）由于

$$\lim_{x\to 0}A(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}}=\sqrt{ab}\text{，}$$

所以当 $c=\sqrt{ab}$ 成立时，$A(x)$ 在 $x=0$ 处连续，否则 $A(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

（2）由于

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}\right\}\text{，}$$

当 $a>b$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = \exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a^x\left[1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\right]-\ln 2}{x}\right\} = a,$$

当 $a<b$ 时，由对称性可知，$\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=b$．当 $a=b$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=a$，因此

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = \max\{a,b\}.$$

类似地

$$\lim_{x\to-\infty} A(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left\{\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}\right\},$$

令 $t=-x$，则

$$\lim_{x\to-\infty} A(x) = \exp\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(a^{-t}+b^{-t})-\ln 2}{-t}\right\},$$

当 $a>b$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty} A(x)=b$，当 $a<b$ 时，由对称性可知，$\lim\limits_{x\to-\infty} A(x)=a$，当 $a=b$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=a$，因此

$$\lim_{x\to-\infty} A(x) = \min\{a,b\}.$$

又因为 $A(-1)=\dfrac{2ab}{a+b}$，$A(1)=\dfrac{a+b}{2}$，从而

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) \geqslant A(1) \geqslant \lim_{x\to 0} A(x) \geqslant A(-1) \geqslant \lim_{x\to-\infty} A(x).$$

例 2.2.30 【1992 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义，且函数 $e^x f(x)$ 和 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都是单调递增的，求证：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续．

分析　设 x_0 为 $(0,1)$ 内的任意一点，只需证明 $f(x)$ 在 x_0 处连续，即证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 成立即可．本题给出的条件只与单调性有关，因此需要考虑 x 与 x_0 的大小关系，即通过左、右极限讨论比较简单．

证　设 x_0 为 $(0,1)$ 内的任意一点，分类讨论．

（1）当 $x_0<x<1$ 时，由于 $e^x f(x)$ 和 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都单调递增，因此有

$$e^{x_0} f(x_0) < e^x f(x), \qquad e^{-f(x_0)} < e^{-f(x)},$$

从而有 $e^{x_0-x} f(x_0) < f(x) < f(x_0)$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$．

（2）当 $0<x<x_0$ 时，由于 $e^x f(x)$ 和 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都单调递增，因此有

$$e^x f(x) < e^{x_0} f(x_0), \qquad e^{-f(x)} < e^{-f(x_0)},$$

从而有 $f(x_0) < f(x) < e^{x_0-x} f(x_0)$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$．

综上，有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，所以函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续．

2.2.10 题型十、连续函数的等式证明问题

例 2.2.31 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)$.

证法 1 利用零点定理．构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

则

$$F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right),\quad F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1).$$

若 $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，取 $\xi=\dfrac{1}{2}$，则结论成立．若 $f(0)\neq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则 $F(0)$ 和 $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 一定异号，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)\subset[0,1]$，使得 $F(\xi)=0$，从而有

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right).$$

证法 2 利用介值定理．构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

由题意可知，$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最值定理可知，$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上一定能够取到最大值 M 和最小值 m，因此有 $m\leqslant\dfrac{1}{2}\left[F(0)+F\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]\leqslant M$，而

$$F(0)+F\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=0,$$

即有 $m\leqslant 0\leqslant M$，由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $F(\xi)=0$，结论得证．

注 本题采用了两种方法，解法 1 的主要优势是能够在开区间 $(0,1)$ 内找到一点 ξ，使得结论成立，而解法 2 只能在闭区间 $[0,1]$ 上找到一点 ξ．第二种方法的主要优势是便于推广．

例 2.2.32 【2008 年北京市竞赛题】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证对于任意正整数 n，必存在 $x_n\in[0,1]$，使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.

证 构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f\left(x_n+\frac{1}{n}\right),$$

由题意可知，$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最值定理可知，$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$ 上一定能够取到最大值 M 和最小值 m，于是有

$$m \leqslant F\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant M,\ k=0,1,\cdots,n-1,$$

所以

$$m \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant M,$$

又因为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\left[f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)\right]=0,$$

从而有 $m \leqslant 0 \leqslant M$，由介值定理可知，至少存在一点 $x_n \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right] \subset [0,1]$，使得 $F(x_n)=0$，即有 $f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.

例 2.2.33　设 N 为某个正整数，函数 $f(x)$ 在 $[0,N]$ 上连续，且有 $f(0)=f(N)$，求证存在 $a \in [0,N-1]$，使 $f(a)=f(a+1)$.

证　当 $N=1$ 时，结论显然成立．当 $N>1$ 时，构造辅助函数

$$F(x)=f(x+1)-f(x),$$

则 $F(x)$ 在 $[0,N-1]$ 上连续，因此一定存在最小值 m 和最大值 M，使得

$$m \leqslant \frac{1}{N}\left[F(0)+F(1)+\cdots+F(N-1)\right] \leqslant M,$$

由介值定理可知，存在 $a \in [0,N-1]$，使得

$$F(a)=\frac{1}{N}\left[F(0)+F(1)+\cdots+F(N-1)\right],$$

而 $F(a)=\frac{1}{N}\left[f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\cdots+f(N)-f(N-1)\right]=0$，因此有

$$f(a)=f(a+1).$$

2.3　深 化 训 练

2.3.1　单项选择题

（1）【2014 年考研题】　若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，则当 n 充分大时有（　　）.

（A）$|a_n| > \frac{|a|}{2}$；　　（B）$|a_n| < \frac{|a|}{2}$；

（C）$a_n > a-\frac{1}{n}$；　　（D）$a_n < a+\frac{1}{n}$.

（2）【2013 年考研题】　当 $x \to 0$ 时，下列结论错误的是（　　）.

（A）$x \cdot o(x^2)=o(x^3)$；　　（B）$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$；

（C）$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$；　　（D）$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

（3）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(5x)}{x}=$（　　）.

（A）$\dfrac{5}{6}$；　　（B）$\dfrac{1}{30}$；　　（C）$\dfrac{15}{2}$；　　（D）$\dfrac{3}{10}$.

（4）【2013 年考研题】函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）.

（A）0；　　（B）1；　　（C）2；　　（D）3.

2.3.2　填空题

（1）当 $x\to 0$ 时，若 $x-\sin x\cdot\cos x\cdot\cos(2x)$ 与 cx^k 为等价无穷小量，则 $c=$________，$k=$________.

（2）【2011 年北京市竞赛题】极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x=$________.

（3）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{2x}}$，则 $f(x)=$________.

（4）函数 $f(x)\dfrac{(x+x^2)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\ln x}{x^2-1}$ 的可去间断点的个数为________个.

（5）【2012 年考研题】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________.

（6）【2002 年北京市竞赛题】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{n}\right)^n=$________，其中 $a>0$，$b>0$ 为常数，且 $a\neq 1$，$b\neq 1$.

（7）若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$，则常数 $a=$________，$b=$________.

（8）【2004 年北京市竞赛题】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=$________.

（9）设 $f(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)x^{\alpha}$，且当 $x\to+\infty$ 时是 $\dfrac{1}{x}$ 的高阶无穷小，则常数 α 的取值范围为________.

（10）【1996 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+x^n)}{\sqrt{n}}$，则 $f(x)$ 的定义域为________.

（11）【2007 年北京市竞赛题】设当 $x\to 1$ 时，$1-\dfrac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}$ 是 $x-1$ 的等价无穷小，则 $m=$________.

（12）【2006 年北京市竞赛题】已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^n+7x^4+2)^{\alpha}-x]$ 存在且不为 0，其中整数 $n>4$，则 $\alpha=$________.

（13）【2005 年北京市竞赛题】已知 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处为无穷间断点，在 $x=1$ 处为可去间断点，则 $b=$________.

2.3.3　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n(\ln n)^2}}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$；

（3）【2012 年考研题】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}(aK^{-x}+bL^{-x}+cE^{-x})^{-\frac{1}{x}}$，其中 a,b,c,K,L,E 均为正数，且 $a+b+c=1$.

2.3.4　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.

2.3.5　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)+xf(x)}{\sin^3 x}=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

2.3.6　【2013 年考研题】 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos(2x)\cdot\cos(3x)$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 和 a 的值.

2.3.7　【1991 年北京市竞赛题】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$，求函数 $f(x)$ 的解析表达式，并画出它的图像.

2.3.8　设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(2^t+x^t)}{t}$，其中 $x>0$，求 $f(x)$ 的表达式.

2.3.9　求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$（$x\geqslant 0$）的间断点并判断其类型.

2.3.10　设 $f_n(x)=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$，讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 的连续性.

2.3.11　设 $x_1=1$，$x_{n+1}=\sin(x_n)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.3.12　设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{81}{x_n^3}\right)$（$n=0,1,2,\cdots$），其中 $x_0>0$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.3.13【2000 年北京市竞赛题】设连续函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，且 $f(x)>0$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，其中 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

2.3.14　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{3}\right)$.

2.3.15　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{3}\right)$.

2.3.16　【1988 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f[f(x)]=x$，证明在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一个 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$.

2.3.17　设 n 为正整数，证明方程 $x^n+2nx-1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一正根 a_n；并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n$.

2.3.18　无穷多个无穷小量的乘积一定是无穷小量么？若不成立，举反例．

****2.3.19**　试证明柯西定理，即已知函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有定义，且内闭有界（即对于任意的 $[c,d]\subset(a,+\infty)$，函数 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上有界），若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)]=A$（或 $+\infty$，或 $-\infty$），证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A \text{（或 } +\infty\text{，或 } -\infty\text{）.}$$

2.4　深化训练详解

2.3.1　（1）A；**提示**　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，因此

$$|a|-|a_n|\leqslant|a_n-a|<\varepsilon,$$

取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$，所以有 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$．选项 C 错误，例如取 $a_n=a-\dfrac{1}{n}$；选项 D 错误，例如取 $a_n=a+\dfrac{1}{n}$．

（2）D；　　（3）A；

（4）C；**提示**　可能的间断点为 $x=-1,0,1$，由于

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^{\ln|x|^x}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=1,$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\infty,$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2},$$

因此 $x=0$ 和 $x=-1$ 为可去间断点．

2.3.2　（1）$\dfrac{8}{3}$，3；　（2）$\dfrac{\pi}{4}$；　（3）$f(x)=\begin{cases}-x & x>0\\ \dfrac{1}{2} & x=0\\ e^{-x} & x<0\end{cases}$；　（4）1；

（5）$e^{-\sqrt{2}}$；**提示**　原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}\cdot\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}$，

而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}=\frac{2}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2},$$

所以原式 $=e^{-\sqrt{2}}$．

（6）$\sqrt{ab}$；

（7）-1；0；**提示**　由于

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a}{1/x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t},$$

因此 $a=-1$，故

$$b=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-t^3}-1}{-t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{3}t^3}{-t}=0 .$$

（8）e^2；

（9）$\alpha<0$；**提示** 当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x)=\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1\right)x^{\alpha}\sim\frac{1}{x}\ln x\cdot x^{\alpha}=x^{\alpha-1}\ln x,$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\ln x=0,$$

所以 $\alpha<0$.

（10）$(-1,1]$；

（11）3；**提示** 根据等价无穷小的定义

$$1=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+\cdots+x^{m-1}-m}{x^m-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+\cdots+(m-1)x^{m-2}}{mx^{m-1}}=\frac{1+2+\cdots+(m-1)}{m}=\frac{m-1}{2},$$

所以 $m=3$.

（12）$\frac{1}{5}$；**提示** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^n+7x^4+2)^{\alpha}-x]=\lim_{x\to+\infty}[x^{n\alpha}(1+7x^{4-n}+2x^{-n})^{\alpha}-x],$$

上述极限存在且不为 0，所以 $n\alpha=1$． 利用等价无穷小量替换，有

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x[(1+7x^{4-n}+2x^{-n})^{\alpha}-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha x(7x^{4-n}+2x^{-n})$

$=\alpha\lim\limits_{x\to+\infty}(7x^{5-n}+2x^{-n+1})$，

因为上述极限存在且不为 0，且整数 $n>4$，因此 $n=5$，故 $\alpha=\frac{1}{5}$.

（13）e .

2.3.3　（1）由于

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n(\ln n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{n(\ln n)^2}\ln(n!)\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}\ln(n!)\right\},$$

而

$$0\leqslant\frac{1}{n(\ln n)^2}\ln(n!)=\frac{1}{n(\ln n)^2}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)\leqslant\frac{n\ln n}{n(\ln n)^2}=\frac{1}{\ln n},$$

根据夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^2}\ln(n!)=0$，原式$=\mathrm{e}^0=1$.

（2）令 $x_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$，则 $\ln x_n=\ln\sqrt[n]{n!}-\ln n$，从而有

$$\ln x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k-\ln n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k-\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n},$$

结合函数的连续性和定积分的定义有

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=-1.$$

从而原极限$=\mathrm{e}^{-1}$.

（3）原式$=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{2-2\cos x}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\frac{1}{12}.$$

（4）$K^aL^bE^c$.

2.3.4　证明不等式 $\ln(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\ln n+1$，具体过程可参考例 2.2.9.

2.3.5　当 $x\to0$ 时，$\ln(1+2x^2)+xf(x)=o(x^3)$，从而有

$$f(x)=\frac{-\ln(1+2x^2)+o(x^3)}{x},$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+2x^2)+o(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+2x^2)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^2}=-2.$$

2.3.6　由等价无穷小的定义，知 $a\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)}{ax^n}=1$．根据洛必达法则

$$1=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)+2\cos x\sin(2x)\cos(3x)+3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)}{x}+\dfrac{2\cos x\sin(2x)\cos(3x)}{x}+\dfrac{3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{x}}{anx^{n-2}},$$

由于

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)}{x}+\frac{2\cos x\sin(2x)\cos(3x)}{x}+\frac{3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{x}\right)=14,$$

因此 n 只能等于 2，从而有 $\dfrac{14}{an}=\dfrac{14}{2a}=1$，所以 $a=7$.

2.3.7　$f(x)=\begin{cases} x & x<-1 \\ 0 & x=-1 \\ -x & -1<x<1 \\ 0 & x=1 \\ x & x>1 \end{cases}$，图像略.

2.3.8　当 $0<x<2$ 时，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\ln 2+\ln\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^t\right)}{t}=\ln 2,$$

当 $x=2$ 时，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(2^t+2^t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(t+1)\ln 2}{t}=\ln 2,$$

当 $x>2$ 时，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\ln x+\ln\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^t\right)}{t}=\ln x,$$

综上可得

$$f(x)=\begin{cases} \ln 2 & 0<x\leqslant 2 \\ \ln x & x>2 \end{cases}.$$

2.3.9　当 $0\leqslant x<2$ 时，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot x^2}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}}=0,$$

当 $x=2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+2^{2n}}}=2\sqrt{2}$，当 $x>2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}}=x^2$.

所以

$$f(x)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x<2 \\ 2\sqrt{2} & x=2 \\ x^2 & x>2 \end{cases},$$

因为 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=4$，$f(2)=2\sqrt{2}$，所以 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

2.3.10　记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，当 $x=0$ 时，$f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$．当 $x\neq 0$ 且当 n 充分大时，

$$f_n(x)=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

所以

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{\sin x}{x}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

2.3.11　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，过程略.

2.3.12　因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(x_n+x_n+x_n+\frac{81}{x_n^3}\right)\geqslant\sqrt[4]{81}=3;$$

数列 $\{x_n\}$ 有下界．而

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{4}\left(\frac{81}{x_n^3}-x_n\right)=\frac{1}{4x_n^3}\left(81-x_n^4\right)\leqslant 0,$$

数列 $\{x_n\}$ 单调递减，根据单调收敛准则，数列 $\{x_n\}$ 收敛．不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有

$$A=\frac{1}{4}\left(3A+\frac{81}{A^3}\right).$$

解得 $A=\pm3$，由极限的保号性可知 $A\geqslant 3$，所以 $A=3$.

2.3.13　由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内递减，有

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)\quad(k=1,2,\cdots),$$

因此

$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

故 $\{a_n\}$ 单调减少，又因为

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right)+f(n)\geqslant 0,\end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 有下界，根据单调收敛准则可知，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

2.3.14　证明过程与例 2.2.32 类似，过程略.

2.3.15　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{3}\right),$$

则

$$F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right),\quad F\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{2}{3}\right),\quad F\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)-f(1).$$

（1）若 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 至少有两个相等，例如 $f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)$，则取 $\xi=\frac{1}{3}$，结论成立.

（2）若 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 都互不相等，则 $F(0)\neq 0$，$F\left(\frac{1}{3}\right)\neq 0$，$F\left(\frac{2}{3}\right)\neq 0$. 不妨设 $F(0)>0$，接下来又分两种情况进行讨论.

若 $F\left(\frac{1}{3}\right)<0$，则由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，结论得证；

若 $F\left(\frac{1}{3}\right)>0$，则有 $f(0)>f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$，从而 $F\left(\frac{2}{3}\right)<0$，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，结论得证.

2.3.16　利用反证法. 假设对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $f(x)\neq x$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 内，要么恒有 $f(x)>x$，要么恒有 $f(x)<x$. 否则，若 $f(x_1)>x_1$，$f(x_2)<x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则由连续函数的介值定理可知，存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使得 $f(x_0)=x_0$.

下面分类讨论：

（1）若对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x)>x$，则 $f[f(x)]>f(x)>x$；

（2）若对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x)<x$，$f[f(x)]<f(x)<x$.

上述两种情况均与题设 $f[f(x)]=x$ 矛盾，因此假设错误，从而在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$.

2.3.17　（1）设 $f_n(x)=x^n+2nx-1$，显然 $f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=2n>0$，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由零点定理可知，$f_n(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上至少存在一个根. 又因为当 $x>0$ 时，

$$f_n'(x)=nx^{n-1}+2n>0,$$

函数 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f_n(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至多有一个根，综上方程 $x^n+2nx-1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一正根 a_n.

（2）因为 a_n 满足 $a_n^n+2na_n-1=0$，因此

$$0<a_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}a_n^n<\frac{1}{2n},\quad na_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a_n^n,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2}$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}\cdot(na_n)}=e^{\frac{1}{2}}.$$

2.3.18　无穷多个无穷小量的乘积不一定是无穷小量. 反例如下.

第一个数列：1,　$\frac{1}{2}$,　$\frac{1}{3}$,　$\frac{1}{4}$,　$\frac{1}{5}$,　$\cdots$,　$\frac{1}{n}$,　$\cdots$

第二个数列：1,　2^1,　$\frac{1}{3}$,　$\frac{1}{4}$,　$\frac{1}{5}$,　$\cdots$,　$\frac{1}{n}$,　$\cdots$

第三个数列：1,　1,　3^2,　$\frac{1}{4}$,　$\frac{1}{5}$,　$\cdots$,　$\frac{1}{n}$,　$\cdots$

第四个数列：1,　1,　1,　4^3,　$\frac{1}{5}$,　$\cdots$,　$\frac{1}{n}$,　$\cdots$

第五个数列：1,　1,　1,　1,　5^4,　$\cdots$,　$\frac{1}{n}$,　$\cdots$

第 n 个数列：1,　1,　1,　1,　1,　$\cdots$,　n^{n-1},　$\frac{1}{n+1}$,　$\cdots$

这样，每个数列都是无穷小量，道理很简单，因为每个数列都只有前面的有限项特殊，后面的无穷多项都是数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的部分，但是所有（无穷多个）这些数列的乘积为

$$1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad \cdots,\quad 1,\quad 1,\quad \cdots$$

这是一个常数列，且极限不为 0．

2.3.19　（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)]=A$，则由极限的定义可知，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正数 $X_0>a$，使得 $x>X_0$ 时，有

$$|f(x)-f(x-1)-A|<\varepsilon\ .$$

当 $x>X_0+1$ 时，则存在正整数 n，满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$，而

$$\frac{f(x)}{x}-A=\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(x-n)-nA}{n}+\frac{f(x-n)}{x}-\frac{(x-n)}{x}A\,,$$

对于上述 $\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 内闭有界，因此存在正数 $X_1>a$，使得当 $x>X_1$ 时，有 $\frac{|f(x-n)|}{x}<\varepsilon$．

类似地，存在正数 $X_2>a$，使得当 $x>X_2$ 时，有 $\frac{|A|}{x}<\varepsilon$．取 $X=\max\{X_0+1,X_1,X_2\}$，则当 $x>X$ 时，对于上述的 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|&<\frac{|f(x)-f(x-n)-nA|}{n}+\frac{|f(x-n)|}{x}+\frac{|A|}{x}\\&<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(x-k+1)-f(x-k)-A|+\varepsilon+\varepsilon\\&<\frac{1}{n}\cdot n\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$．

（2）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)]=+\infty$，则由正无穷大量的定义可知，对于任意的正数 $M>0$，存在正数 $X_0>a$，使得 $x>X_0$ 时，有 $f(x)-f(x-1)>4M$．当 $x>2(X_0+1)$ 时，存在正整数 n，

满足 $n \leqslant x - X_0 < n+1$，此时有

$$n+1 > x - X_0 > 2(X_0+1) - X_0 = X_0 + 2 > [x-(n+1)] + 2 = x - n + 1,$$

即有 $n > x - n$，故 $n > \frac{1}{2}x$．而

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(x-n)}{n} + \frac{f(x-n)}{x},$$

由于 $f(x)$ 内闭有界，因此存在正数 $X_1 > a$，使得当 $x > X_1$ 时，对于上述的 $M > 0$，有

$$\frac{|f(x-n)|}{x} < M,$$

取 $X = \max\{2(X_0+1), X_1\}$，则当 $x > X$ 时，对于上述的 $M > 0$，有

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &> \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x) - f(x-n)}{n} - \frac{|f(x-n)|}{x} \\
&> \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} [f(x-k+1) - f(x-k)] - M \\
&> \frac{1}{2n} \cdot 4nM - M = M.
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$．类似可以证明，当 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - f(x-1)] = -\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$，结论得证.

第 3 章　导数与微分

3.1　知 识 要 点

本章内容主要包括：导数和微分的概念，导数的几何意义与物理意义，可导与连续的关系，平面曲线的切线与法线，导数和微分的四则运算，复合函数与反函数微分法，隐函数与参数方程的微分法以及高阶导数等内容.

3.1.1　导数的概念

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数的定义为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

导函数 $f'(x)$ 的定义为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数的定义分别为

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在并且相等.

在讨论初等函数在定义区间端点的可导性或分段函数在分段点处的可导性时，往往利用左、右导数进行讨论.

3.1.2　导数的几何意义

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$，则切线方程为 $x=x_0$. 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),$$

若 $f'(x_0)=0$，则法线方程为 $x=x_0$.

3.1.3　高阶导数

$y=f(x)$ 在 x_0 处的二阶导数的定义为

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0};$$

$y=f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶导数的定义为

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}.$$

莱布尼茨公式

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均 n 阶可导，则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}，其中 u^{(0)}=u,\quad v^{(0)}=v.$$

几个常用的高阶导数公式

（1）$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$；

（2）$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$；

（3）$\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a,(a>0)$.

3.1.4　复合函数的求导法则

若函数 $u=\phi(x)$ 在点 x 处有导数 $\phi'(x)$，函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u=\phi(x)$ 处有导数 $f'(u)$，则复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 在点 x 处可导，且导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

对于函数 $y=f(u)$，不论 u 是自变量还是中间变量，其微分都可以表示为如下形式

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u,$$

这一性质称为一阶微分形式不变性.

3.1.5　反函数求导法则

设单调连续函数 $x=\phi(y)$ 在点 y 处可导，且 $\phi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应点 x 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)=\frac{1}{\phi'(y)},$$

若 $x=\phi(y)$ 二阶可导，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''(x)=-\frac{\phi''(y)}{[\phi'(y)]^3}.$$

*3.1.6 参数方程所确定的函数的导数

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 确定，且函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均可导， $x'(t)\neq 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

若函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均二阶可导，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}\\&=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}.\end{aligned}$$

3.1.7 几个重要的结论

（1）若函数 $f(x)$ 可导且为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

（2）若函数 $f(x)$ 可导且为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

（3）若函数 $f(x)$ 可导且为周期函数，则 $f'(x)$ 为周期函数，且周期相同；

（4）若 $f(x)$ 为奇函数，且 $f'(x_0)=A$，则 $f'(-x_0)=A$；

（5）若 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(x_0)=A$，则 $f'(-x_0)=-A$；

（6）若 $f(x)$ 为周期为 T 的函数，且 $f'(x_0)=A$，则 $f'(x_0+T)=A$.

注 前三个结论与后三个结论是不同的，前三个是关于导函数的问题，后三个是函数仅仅在某点处可导的问题.

3.1.8 达布（Darboux）定理

（1）**导函数的介值定理** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导， $f'_+(a)\neq f'_-(b)$， c 为介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=c$ 成立.

（2）**导函数的零点定理** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$ 成立.

注 达布定理说明导函数不可能存在第一类间断点，即使导函数不连续，也能取到中间值.

3.2 典型例题分析

3.2.1 题型一、导数的定义问题

例 3.2.1 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充要条件是（ ）.

（A）$\lim\limits_{h\to+\infty}hf\left(\dfrac{1}{h}\right)$ 存在； （B）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在；

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(\mathrm{e}^h-1)$ 存在； （D）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(\cos h-1)$ 存在.

解 答案选 C．令 $t=\mathrm{e}^h-1$，则 $h\to 0\Leftrightarrow t\to 0$，从而

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(\mathrm{e}^h-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{\mathrm{e}^h-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{\mathrm{e}^h-1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0).$$

A 选项错误．令 $t=\dfrac{1}{h}$，则 $h\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0^+$，从而

$$\lim_{h\to+\infty}h\cdot f\left(\frac{1}{h}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'_+(0),$$

即选项 A 中的极限存在仅保证了 $f'_+(0)$ 存在．

B 选项错误．$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导可以推出极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在．但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在不一定能推出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，例如取函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases},$$

则有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,$$

即极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在，但函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导．

D 选项错误．因为令 $t=\cos(h)-1$，则 $h\to 0\Leftrightarrow t\to 0^-$，从而

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(\cos h-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\cos h-1)}{\cos h-1}\cdot\frac{\cos h-1}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\cos h-1)}{\cos h-1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-\frac{1}{2}f'_-(0),$$

即选项 D 中极限存在仅保证了 $f'_-(0)$ 存在．

例 3.2.2　【1995 年北京市竞赛题】 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)=2,$$

试求 $f(0)$ 和 $f'(0)$．

解　利用泰勒展开，当 $x\to 0$ 时，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x),\quad \sin x=x+o(x^2),$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(0)+x^2f'(0)+x+o(x^2)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x[1+f(0)]+x^2f'(0)+o(x^2)}{x^2}=2,$$

因此有 $f(0)=-1$， $f'(0)=2$．

注　本题假设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，因此可以将 $f(x)$ 进行一阶泰勒展开．事实上，本题的条件可以进一步弱化，当然解题方法也要改变，见例 3.2.3.

例 3.2.3　已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{\sin x}{x^2}\right)=2$，试求 $f(0)$ 和 $f'(0)$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=2$，可知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+f(x)\right)=0$，从而有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1 .$$

又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=-1 .$$

又因为

$$\begin{aligned}2&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x-x}{x^2}\right)\\&=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}\\&=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=f'(0),\end{aligned}$$

所以 $f'(0)=2$.

3.2.2　题型二、反函数、复合函数求导问题

例 3.2.4　证明函数 $x=y-\dfrac{1}{2}\sin y$ 一定存在反函数 $y=f(x)$，并求 $f'(x)$.

解　由于

$$x'_y=1-\frac{1}{2}\cos y>0 ,$$

因此函数 $x=y-\dfrac{1}{2}\sin y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调递增，故其反函数一定存在，且

$$f'(x)=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}\cos y}=\frac{2}{2-\cos y} .$$

例 3.2.5　下列结论正确的是（　　）.

（A）若 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导，$y=f(u)$ 在 $u=g(x_0)$ 处可导，则复合函数 $f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处一定不可导.

（B）若 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，$y=f(u)$ 在 $u=g(x_0)$ 处不可导，则复合函数 $f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处一定不可导.

（C）若 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导，$y=f(u)$ 在 $u=g(x_0)$ 处不可导，则复合函数 $f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处不一定不可导.

（D）上述结论都不正确.

解　答案选 D．选项 A 错误．例如取

$$g(x)=\begin{cases}2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases},\qquad f(u)=1\ （u\in R），$$

显然 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但对于 $\forall x\in R$，$f[g(x)]=1$，显然 $f[g(x)]$ 在 $x=0$ 处可导．

B 选项错误．例如对于 $\forall x\in R$，$g(x)=1$，$f(u)=\begin{cases}2 & u\neq 1\\ 0 & u=1\end{cases}$，$g(x)$ 可导，$f(u)$ 在 $u=1$ 处不可导，但对于 $\forall x\in R$，$f[g(x)]=0$，显然 $f[g(x)]$ 在任何一点都可导．

C 选项错误．例如 $g(x)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，$f(u)=\begin{cases}u & u\neq 1\\ 0 & u=1\end{cases}$，函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，$f(u)$ 在 $u=1$ 处不可导，但是 $f[g(x)]=\begin{cases}0 & x=0,1\\ x & x\neq 0,x\neq 1\end{cases}$，可以证明函数 $f[g(x)]$ 在 $x=0$ 处可导．

例 3.2.6　已知函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\mathrm{e}^{2x}$，试求 $f'[g(x)]$ 和 $\{f[g(x)]\}'$．

解　由题意，$f'(x)=\cos x$，$g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}$，所以

$$f'[g(x)]=\cos(\mathrm{e}^{2x}),$$

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]\cdot g'(x)=\cos(\mathrm{e}^{2x})\cdot 2\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\cos(\mathrm{e}^{2x}).$$

注　$f'[g(x)]$ 表示先求导数、再进行复合运算，$\{f[g(x)]\}'$ 表示先进行复合运算、再求导数．

例 3.2.7　设 $y=f(\mathrm{e}^x)$，其中 f 二阶可导，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

解　根据复合函数运算法则，有

$$y'=f'(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x,$$

$$\begin{aligned}y''&=[f'(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x]'=f''(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x+f'(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x\\&=f''(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^{2x}+f'(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

3.2.3　题型三、导数的几何意义

例 3.2.8　【2008 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 连续，在 $x=1$ 处可导，且满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),\ (x\to 0)$$

则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为________．

解　等式两边同时求极限，即

$$\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim_{x\to 0}[8x+o(x)],$$

因为 $f(x)$ 连续，因此 $f(1)-3f(1)=0$，解得 $f(1)=0$．因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{x}=8,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=4f'(1),$$

所以 $f'(1)=2$，因此切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $y=2x-2$．

例 3.2.9 【2007 年北京市竞赛题】 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -1，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=$________.

解 由题意，$f(1)=0$，$f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=f'(1)(x-1),$$

又因为切线在 y 轴上的截距为 -1，即当 $x=0$ 时，$y=-1$，所以 $f'(1)=1$．结合第二个重要极限和导数的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{f'(1)}=\mathrm{e}.$$

3.2.4 题型四、利用导数的定义求极限

例 3.2.10 【2005 年北京市竞赛题】 设函数 $y=y(x)$ 满足 $y''+(x-1)y'+x^2y=\mathrm{e}^x$，且 $y'(0)=1$，若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=a$（$a$ 为实数），试求 a 的值.

分析 由题意，可得

$$y''=\mathrm{e}^x-(x-1)y'-x^2y,$$

等式右边的表达式可导，从而函数 $y=y(x)$ 三阶可导，由类似方法可以推知函数 $y=y(x)$ 任意阶可导，从而 $y=y(x)$ 及其各阶导数都是连续的.

解 由题意，函数 $y=y(x)$ 连续且任意阶可导，又因为极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}$ 存在，因此有 $\lim\limits_{x\to0}[y(x)-x]=0$，从而 $y(0)=0$． 因此

$$a=\lim_{x\to0}\frac{y(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{y'(x)-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{y''(x)}{2}=\frac{1}{2}y''(0).$$

将 $x=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$ 代入方程 $y''+(x-1)y'+x^2y=\mathrm{e}^x$，即有

$$y''(0)+(0-1)y'(0)+0=\mathrm{e}^0,$$

解得 $y''(0)=2$，所以 $a=1$.

注 若将原题中的条件 $y''+(x-1)y'+x^2y=\mathrm{e}^x$ 改为 $y''(0)=2$，其他条件不变，解题过程又如何？见例 3.2.11.

例 3.2.11 设函数 $y=y(x)$ 满足 $y'(0)=1$，$y''(0)=2$，若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=a$（$a$ 为实数），试求 a 的值.

解 因为 $y''(0)$ 存在，函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且导函数 $y'(x)$ 存在．又因为极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}$ 存在，因此有 $\lim\limits_{x\to0}[y(x)-x]=0$，从而 $y(0)=0$．结合洛必达法则和二阶导数的定义，得

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)-y(0)}{2x}=\frac{1}{2}y''(0)=1.$$

注　由于本题没有设定函数 $y''(x)$ 存在且 $y''(x)$ 连续，因此上式中不能连续使用洛必达法则，只能利用二阶导数的定义进行求解.

3.2.5　题型五、分段函数的导数问题

例 3.2.12　已知函数 $y=f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解　当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}+x^4\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

即

$$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x}=0,$$

根据二阶导数的定义，有

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right)=0.$$

3.2.6　题型六、高阶导数问题

例 3.2.13　已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f'(2-t)-f'(2)}{t}$.

解　$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f'(2-t)-f'(2)}{t}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f'(2-t)-f'(2)}{-t}=-f''(2)$，

又因为

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2},$$

$$f''(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{x^3}\right),$$

所以

$$f''(2)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{16}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

例 3.2.14　已知函数 $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，求 $y^{(n)}(0)$.

解法 1　因为

$$y=\frac{x^2-1+1}{1-x^2}=-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}=-1+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}-\frac{1}{2}(x-1)^{-1},$$

求各阶导数，得

$$y'=\frac{1}{2}\cdot(-1)(x+1)^{-2}-\frac{1}{2}(-1)(x-1)^{-2},$$

$$y''=\frac{1}{2}\cdot(-1)^2 2!(x+1)^{-3}-\frac{1}{2}(-1)^2 2!(x-1)^{-3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}-\frac{1}{2}(-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)},$$

所以

$$y^{(2m)}(0)=(2m)!,\quad y^{(2m+1)}(0)=0.$$

解法 2　利用级数，因为

$$y=\frac{x^2}{1-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots$$

所以

$$y^{(2m)}(0)=(2m)!,\quad y^{(2m+1)}(0)=0.$$

例 3.2.15　设 $y=f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，求 $y^{(2015)}$.

解　由题意，$y=(1+x)\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，令 $u=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，则

$$u'=(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}},$$

$$u''=(-1)^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1\times3}{2^2}(1-x)^{-\frac{5}{2}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$u^{(n)}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

根据高阶导数的莱布尼茨定理，有

$$\begin{aligned}y^{(2015)}&=(1+x)\cdot u^{(2015)}+C_{2015}^{1}u^{(2014)}\\&=(1+x)\frac{4029!!}{2^{2015}}(1-x)^{-\frac{4031}{2}}+2015\cdot\frac{4027!!}{2^{2014}}(1-x)^{-\frac{4029}{2}}.\end{aligned}$$

例 3.2.16　设 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x+4x^2}$，试求 $f^{(2016)}(0)$ 和 $f^{(2017)}(0)$.

解　当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{1+2x+4x^2}=\frac{1-2x}{1-(2x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^{3n+1},$$

而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林展开式为 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，根据麦克劳林级数的唯一性，有

$$\frac{f^{(2016)}(0)}{2016!}=2^{2016},\quad \frac{f^{(2017)}(0)}{2017!}=-2^{2017}.$$

因此 $f^{(2016)}(0)=2^{2016}\cdot 2016!$，$f^{(2017)}(0)=-2^{2017}\cdot 2017!$.

注　本题是利用麦克劳林级数求函数在 $x=0$ 处的高阶导数值.

例 3.2.17　【2005 年北京市竞赛题】设 $f(x)=(x-1)^5\mathrm{e}^{-x}$，求 $f^{(10)}(1)$.

解　利用函数 e^x 在 $x=1$ 处的泰勒级数公式，有

$$f(x)=\mathrm{e}^{-1}(x-1)^5\mathrm{e}^{-(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-1}}{n!}(x-1)^{n+5},$$

而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒展开式为 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$，根据泰勒级数的唯一性，有

$$\frac{f^{(10)}(1)}{10!}=\frac{(-1)^5}{5!}\mathrm{e}^{-1},$$

所以 $f^{(10)}(1)=-\dfrac{10!}{5!}\mathrm{e}^{-1}$.

注　本题是利用泰勒级数求函数在 $x=x_0$ 处的高阶导数值.

例 3.2.18　【2006 年北京市竞赛题】 设非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数，且满足 $f(0)=g(0), f'(0)=g'(0), f''(0)\neq g''(0)$，则

（1）已知当 $x\to 0$ 时， $\mathrm{e}^{\sqrt{1+f(x)}-\sqrt{1+g(x)}}-1=O(x^n)$，这里 $O(x^n)$ 表示 x^n 的同阶无穷小量，求 n；

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x\ln(1+x)}$.

解　（1）由于 $\mathrm{e}^{\sqrt{1+f(x)}-\sqrt{1+g(x)}}-1=O(x^n)$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+f(x)}-\sqrt{1+g(x)}}-1}{x^n}$ 存在且不等于 0．而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+f(x)}-\sqrt{1+g(x)}}-1}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)}-\sqrt{1+g(x)}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n[\sqrt{1+f(x)}+\sqrt{1+g(x)}]},$$

因此极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x^n}$ 存在且不为零，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-g'(x)}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}-\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x}}{nx^{n-2}},$$

由于上式极限存在且不为零，且分子极限不为零，因此 $n=2$.

（2）$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-g'(x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\frac{g'(x)-g'(0)}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(0)-g''(0)].$$

注 由于本题没有设定函数 $y''(x)$ 存在且 $y''(x)$ 连续，因此只能利用二阶导数的定义进行求解.

3.2.7 题型七、隐函数的求导问题

例 3.2.19 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\int_1^{y^2}\ln t\,\mathrm{d}t+\int_{3x}^{\ln y}t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=1$ 所确定的隐函数，求 $f'(x)$.

解 方程两边关于 x 求导，并将 y 视为 x 的函数，得

$$\ln(y^2)\cdot 2y\cdot y'+\ln y\cdot \mathrm{e}^{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot y'-3x\mathrm{e}^{3x}\cdot 3=0,$$

整理可得

$$y'\cdot(4y+1)\ln y=9x\mathrm{e}^{3x},$$

因此有

$$y'=\frac{9x\mathrm{e}^{3x}}{(4y+1)\ln y}.$$

3.2.8 题型八、导数的等式证明问题

例 3.2.20 （**导函数的介值定理**）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，c 为介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的任一实数，试证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=c$ 成立.

证 因为 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，不妨设 $f'_+(a)<c<f'_-(b)$. 构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-cx,$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'_+(a)=f'_+(a)-c<0$，$F'_-(b)=f'_-(b)-c>0$，又因为

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a},\quad F'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}$$

根据极限的保号性，可知 $\exists\delta_1>0$，使得 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，有 $F(x)<F(a)$；$\exists\delta_2>0$，使得 $x\in(a,a+\delta_2)$ 时，有 $F(x)<F(b)$. 又因为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定取得最大值 M 和最小值 m，且最小值 m 一定在 (a,b) 内部取到. 不妨设 $F(x)$ 在 $\xi\in(a,b)$ 处取得最小值，则由费马引理可知，$F'(\xi)=0$，从而有 $f'(\xi)=c$.

注 导函数的介值定理（达布定理）的证明用到了极限的保号性，闭区间上连续函数的最值定理以及费马引理，具有较强的综合性. 下面看一个达布定理应用的例子.

例 3.2.21 【2007 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三次可微，证明存在 $\xi\in(-1,1)$，使得

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).$$

证　利用麦克劳林公式，至少存在一点 $\eta\in(-1,1)$，使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3,$$

在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$，得

$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!},\quad \xi_1\in(0,1),$$

$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!},\quad \xi_2\in(-1,0),$$

两式相减，可得

$$f(1)-f(-1)=2f'(0)+\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)],$$

若 $f'''(\xi_1)=f'''(\xi_2)$，取 $\xi=\xi_1$，结论显然成立.

若 $f'''(\xi_1)\neq f'''(\xi_2)$，则 $\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$ 显然介于 $f'''(\xi_1)$ 和 $f'''(\xi_2)$ 之间，由导函数的介值定理可知，存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$，从而有

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).$$

注　本题中出现了 $f(1)$，$f(-1)$，$f'(0)$ 以及 $f'''(\xi)$，且函数 $f(x)$ 三次可微，因此利用泰勒公式（麦克劳林公式）是比较自然的. 由于题目中没有提及 $f'''(x)$ 连续，因此只能使用达布定理. 显然例 3.2.22 是本题的一个特例.

例 3.2.22　【2011 年全国竞赛预赛题】 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，求证：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

分析　显然上题的证明过程完全适应于本题. 另外，由于本题还加了一个条件，即 $f'''(x)$ 连续，因此本题的证明还可以利用连续函数的介值定理.

证　由例 3.2.21 的证明可知，存在 $\xi_1\in(0,1)$ 和 $\xi_2\in(-1,0)$，使得

$$f(1)-f(-1)=2f'(0)+\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)],$$

代入 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，即有 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$. 因为 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一定取得最大值 M 和最小值 m，从而有

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]\leqslant M,$$

根据连续函数的介值定理可知，至少存在一点 $x_0\in(\xi_2,\xi_1)\subset(-1,1)$，使得 $f'''(x_0)=3$.

3.2.9　题型九、导函数的连续性问题

例 3.2.23　【2009 年北京市竞赛题】 设 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$，其中 A 为常数，讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　由题意，$f(0)=0$，$g(0)=0$．令 $u=xt$，则当 $x\neq 0$ 时，$g(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，所以当 $x\neq 0$ 时，

$$g'(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

当 $x=0$ 时，

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2},$$

因为

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0),$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

例 3.2.24　【2011 年北京市竞赛题】　设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，证明函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ f'(0) & x=0\end{cases}$$

具有一阶连续导数．

证　当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；在 $x=0$ 处，利用导数的定义，有

$$\begin{aligned}g'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0),$$

即有 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=g'(0)$，因此 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，结合 $f''(x)$ 的连续性可知，函数 $g'(x)$ 处处连续，结论得证．

*3.2.10　题型十、导数的参数方程问题

例 3.2.25　已知摆线的参数方程为 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，其中 $a>0$，试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$．

解　由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}$$
$$=\frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}$$
$$=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},$$

因此 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$， $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{a}$.

例 3.2.26　设 $x=\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$， $y=\int_0^t \mathrm{e}^s\sin(t-s)^2\mathrm{d}s$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　令 $u=t-s$，则 $s=t-u$， $\mathrm{d}s=-\mathrm{d}u$，所以

$$y=-\int_t^0 \mathrm{e}^{t-u}\sin(u^2)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^t\cdot\int_0^t \mathrm{e}^{-u}\sin(u^2)\mathrm{d}u,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\mathrm{e}^t\cdot\int_0^t \mathrm{e}^{-u}\sin(u^2)\mathrm{d}u+\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t}\sin(t^2)}{\mathrm{e}^{-t^2}}$$
$$=\mathrm{e}^{t+t^2}\cdot\int_0^t \mathrm{e}^{-u}\sin(u^2)\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{t^2}\sin(t^2).$$

3.2.11　题型十一、导数的综合问题

****例 3.2.27**　【2008、1992 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)\neq 0$，试求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解　$y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

该切线在 x 轴上的截距为 $u(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. 因为 $f(0)=f'(0)=0$，将函数 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处分别泰勒展开为

$$f(x)=\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),\qquad f'(x)=f''(0)x+o(x),$$

因此

$$u(x)=x-\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{f''(0)x+o(x)}=\frac{x}{2}+o(x).$$

由洛必达法则有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(u(x))u'(x)}{f(x)},$$

又因为 $u'(x)=\dfrac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}$，因此

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(u(x))\,f''(x)}{[f'(x)]^2}=f''(0)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{f(u(x))}{[f'(x)]^2}\\&=f''(0)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}f''(0)u^2(x)+o(u^2(x))}{[f''(0)x+o(x)]^2}\\&=f''(0)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{8}f''(0)x^2+o(x^2)}{[f''(0)]^2x^2+o(x^2)}=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

注　这里用到一个结论：若无穷小量 $\alpha\sim\beta$，则其充分必要条件为 $\alpha=\beta+o(\beta)$．令

$$\alpha=\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{f''(0)x+o(x)},\quad \beta=\frac{1}{2}x,$$

则

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x[f''(0)x+o(x)]}=1,$$

因此 $\alpha=\dfrac{1}{2}x+o(x)$．

3.3　深 化 训 练

3.3.1　单项选择题

（1）若 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=$（　　）.

（A）$\dfrac{y''}{(y')^2}$；　（B）$-\dfrac{y''}{(y')^2}$；　（C）$\dfrac{y''}{(y')^3}$；　（D）$-\dfrac{y''}{(y')^3}$．

（2）函数 $f(x)=|x^3+3x^2-4x|(x^2+5x+4)$ 的不可导点的个数为（　　）.

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3．

（3）已知 $y=\ln|\tan(\sqrt{x})|$，则 $\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{\tan\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　（B）$\dfrac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\tan\sqrt{x}}$；　（C）$\dfrac{\mathrm{d}\,(\tan\sqrt{x})}{\tan\sqrt{x}}$；　（D）$\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{\tan\sqrt{x}}\mathrm{d}x$．

3.3.2　填空题

（1）【2001 年北京市竞赛题】若函数 $f(x)=\begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则正整数 k 的最小值为________.

（2）若 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right]=2x^2-\dfrac{1}{x}$，则 $f'(1)=$________.

（3）【2007 年北京市竞赛题】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)-\dfrac{1}{y-x}=1$ 所确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 点处的切线方程为________.

*（4）设 $\begin{cases} x=\phi(2t) \\ y=t^2 \end{cases}$，其中函数 ϕ 二阶可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=$________.

（5）【2007 年北京市竞赛题】 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，则 $f'(1)=$________.

（6）【2002 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=1$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

（7）设 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(-2)=4$，则 $f'(2)=$________.

（8）【2004 年北京市竞赛题】设 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf\left(\dfrac{2}{n}\right)}=$________.

（9）【2004 年北京市竞赛题】设 $g(x)$ 满足 $g'(x)+g(x)\sin x=\cos x$，且 $g(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=$________.

（10）【2012 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，在 $x=0$ 的某个邻域内满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)\ ,$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程为________.

（11）【1999 年北京市竞赛题】 设 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，则 $y^{(n)}=$________.

（12）【2013 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x-1 & x<0 \\ x+a & 0\leqslant x<1 \\ 1+b\sin(x-1) & x\geqslant 1 \end{cases}$ 在点 $x=0$，$x=1$ 处可导，则参数 a 与 b 的和 $a+b=$________.

3.3.3　已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，试求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

3.3.4　设 $y=f(x)$ 是由方程 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{y}\mathrm{e}^x\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=1\ (x>0)$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3.3.5　设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\tan y=xy+1$ 确定，$x=x(t)$ 由方程 $t\cos+x=0$ 确定，求复合函数 $y=f[x(t)]$ 的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

3.3.6　设 $f(x)$ 可微，求下列函数的微分.

（1） $y=f(\mathrm{e}^{2x})\mathrm{e}^{f(2x)}$；　　　　（2） $y=f[f(\mathrm{e}^{2x})]$.

3.3.7　已知 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{2x}$，求 $f^{(100)}(0)$.

3.3.8【2008 年首都经济贸易大学竞赛题】 设 $f(x)=x^2\sin^2 x$，试求 $f^{(2008)}(0)$.

3.3.9　已知 $y=f(x)=\arcsin x$，求 $f^{(n)}(0)$.

3.3.10【1994 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x)^2$，试判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导.

3.3.11　【2012 年北京市竞赛题】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=0$，$g'(0)=-1$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性.

***3.3.12**　设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 所确定，其中 $a>0$，试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

****3.3.13**【2012 年全国竞赛预赛题】设 $y=f(x)$ 存在二阶导数，且 $f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $p(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

3.4　深化训练详解

3.3.1　（1）D；**提示**　设 $y=f(x)$，由反函数求导法则可知，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(x)}.$$

根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

（2）C；　　　（3）C.

3.3.2　（1）2；　（2）$-\dfrac{1}{3}$；　（3）$y=2x-1$；　（4）$\dfrac{2t\phi''(2t)-\phi'(2t)}{2t^3}$；

（5）$f'(1)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$，**提示　解法 1**

$$f(x)=(x-1)\cdot\frac{(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

利用乘积求导法则即可.

解法 2　导数的定义.

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

（6）9；　（7）-4；　（8）$\sqrt{2}$；　（9）1；　（10）$2x-y-12=0$；

（11）$(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$；　（12）1.

3.3.3　$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0).$$

3.3.4　方程整理为 $e^x\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{y}\sin t\,dt+\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=1$，方程两边关于 x 求导，得

$$e^x\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{y}\sin t\,dt+e^x\sin y\cdot y'+\frac{\sin(x^2)}{x}=0,$$

因此有

$$y'=\frac{-\dfrac{\sin(x^2)}{x}-e^x\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{y}\sin t\,dt}{e^x\sin y}=\frac{-\sin(x^2)+xe^x\cdot\cos y}{xe^x\sin y}.$$

3.3.5　$-\dfrac{\pi}{8}$；

3.3.6　（1）$2e^{f(2x)}[f'(e^{2x})e^{2x}+f(e^{2x})f'(2x)]dx$；（2）$2e^{2x}f'[f(e^{2x})]f'(e^{2x})dx$.

3.3.7　$2^{100}e^{2x}(x^2+100x+2475)$.

3.3.8　由于

$$f(x)=x^2\cdot\frac{1}{2}[1-\cos(2x)]=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+2},$$

而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林级数为 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，根据函数麦克劳林级数的唯一性，有

$$\frac{f^{(2008)}(0)}{2008!}=\frac{(-1)^{1003}}{2006!}2^{2005},$$

所以有 $f^{(2008)}(0)=-2008\times 2007\times 2^{2005}$.

3.3.9 $y'=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，因此 $(1-x^2)(y')^2=1$，等式两边同时对 x 求导数，有

$$-2x(y')^2+2(1-x^2)y'\cdot y''=0 ,$$

整理得 $y''=xy'+x^2y'$，根据高阶导数的莱布尼茨定理有

$$y^{(n+2)}=xy^{(n+1)}+C_n^1y^{(n)}+x^2y^{(n+2)}+2xC_n^1y^{(n+1)}+2C_n^2y^{(n)} ,$$

将 $x=0$ 代入上式，则有 $y^{(n+2)}(0)=ny^{(n)}(0)+n(n-1)y^{(n)}(0)$，从而有

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0) ,$$

又因为 $y'=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$， $y''=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$， $y'(0)=1$， $y''(0)=0$，因此

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k\\ [(2k-1)!!]^2 & n=2k+1\end{cases}.$$

3.3.10 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. **提示** 当 $-1\leqslant x<0$ 时，则 $0\leqslant x+1<1$，因此

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)[1-(x+1)]^2=\frac{1}{2}x^2(x+1) ,$$

这时可以利用 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 的定义进行判断.

3.3.11 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}(g''(0)-1) & x=0\end{cases}$. $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

3.3.12 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{3a\sin^2t\cos t}{-3a\cos^2t\sin t}=-\tan t$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}=(-\tan t)'\cdot\frac{1}{-3a\cos^2t\sin t}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{\cos^4t\cdot\sin t} ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\left(\frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{\cos^4t\cdot\sin t}\right)'\cdot\frac{1}{x'(t)}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{4\sin^2t-\cos^2t}{\cos^5t\cdot\sin^2t}\cdot\frac{1}{-3a\cos^2t\sin t}$$

$$=-\frac{1}{9a^2}\cdot\frac{4\sin^2t-\cos^2t}{\cos^7t\cdot\sin^3t}$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3a}$， $\left.\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{16}{3a^2}$.

3.3.13 切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x) ,$$

令 $Y=0$，该切线在 x 轴上的截距为 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. 因为 $f(0)=f'(0)=0$，当 $x\to 0$ 时，将函数 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处分别泰勒展开为

$$f(x)=\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),$$

$$f'(x)=f''(0)x+o(x),$$

因此当 $x\to 0$ 时，

$$u(x)=x-\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{f''(0)x+o(x)}=\frac{x}{2}+o(x).$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{u^3f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{1}{2}f''(0)u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)\right)}=2.$$

第 4 章　微分中值定理

4.1　知 识 要 点

本章内容主要包括：四个微分中值定理，即罗尔（Rolle）中值定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理、柯西（Cauchy）中值定理，以及泰勒（Taylor）中值定理．微分中值定理揭示了函数与其导函数之间的关系，是导数应用的理论基础，在整个微积分学中占有重要地位，是数学竞赛考试的重要内容．

4.1.1　中值定理

1．罗尔中值定理

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

2．拉格朗日中值定理

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日公式的其他形式：

（1）$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，这里 a 和 b 没有大小关系．

（2）若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $x, x+\Delta x\in(a,b)$，则有 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\cdot\Delta x$，其中 ξ 介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间．

拉格朗日定理的两个推论

（1）若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，对于 $\forall x\in I$，有 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 为 I 上的一个常值函数，即 $f(x)=C,\ \ x\in I$.

（2）若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上均可导，对于 $\forall x\in I$，有 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在区间 I 上 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相差某个常数，即 $f(x)=g(x)+C$，$x\in I$.

注　若 $f(a)=f(b)$，则拉格朗日中值定理的结论为 $f'(\xi)=0$，因此拉格朗日中值定理可以理解为罗尔定理的推广．

3．柯西中值定理

函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

注　若取 $g(x)=x$，则柯西中值定理转化为拉格朗日中值定理，因此，柯西中值定理可以理解为拉格朗日中值定理的推广．

4．泰勒中值定理

若 $f(x)$ 在含有 x_0 的一个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则对于 $\forall x \in (a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 为余项．泰勒中值定理的余项有多种类型，例如常见的类型主要有四种.

（1）拉格朗日型余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的某个数.

（2）皮亚诺型余项

$$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0 .$$

（3）柯西型余项

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right),$$

其中 $\theta\in(0,1)$.

（4）积分型余项

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t .$$

若 $x_0=0$，泰勒公式也称为**麦克劳林公式**，例如带有皮亚诺余项的麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),\quad x\to 0 .$$

注　带有皮亚诺余项的泰勒展开式的条件要比带有拉格朗日余项的条件弱一些．带有拉格朗日余项时，需要求 $f(x)$ 在含有 x_0 的一个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，而带有皮亚诺余项时，只需要求 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数即可.

4.1.2　一些常用的麦克劳林公式

当 $x\to 0$ 时，有

（1）$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$；

（2）$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$；

（3）$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$；

（4）$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$；

（5）$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$；

（6）$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

4.1.3 一些常用的结论或公式

（1） $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$， $x \in [-1,1]$；

（2） $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$， $x \in (-\infty, +\infty)$；

（3） $\arctan(\mathrm{e}^x) + \arctan(\mathrm{e}^{-x}) = \dfrac{\pi}{2}$， $x \in (-\infty, +\infty)$.

4.2 典型例题分析

4.2.1 题型一、利用中值定理证明等式问题

例 4.2.1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，求证至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = -2\xi f(\xi)$.

证 构造辅助函数

$$F(x) = \mathrm{e}^{x^2} f(x),$$

显然 $F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，且 $F(a)=F(b)$，根据罗尔中值定理可知，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $F'\left(\xi\right)=0$，而

$$F'(x) = [f'(x) + 2xf(x)]\mathrm{e}^{x^2},$$

从而有 $[f'(\xi)+2\xi f(\xi)]\mathrm{e}^{\xi^2} = 0$，即有 $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$，从而结论得证.

注 此类等式一般需要利用罗尔定理来证明，证明的关键是构造辅助函数．构造辅助函数的基本思路为：

（1）将要证明的等式化成比较简单的形式，然后移到等式的一边，以本题为例，即证明 $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$；

（2）将上述等式左边中的 ξ 改写成 x，即 $f'(x)+2xf(x)$；

（3）构造函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=f'(x)+2xf(x)$ 或者 $F'(x)=[f'(x)+2xf(x)]\phi(x)$，其中 $\phi(x)\neq 0$．例如本题中，$F(x)=\mathrm{e}^{x^2}f(x)$，$F'(x)=[f'(x)+2xf(x)]\mathrm{e}^{x^2}$．在构造辅助函数时，$F(x)=\mathrm{e}^{\lambda(x)}f(x)$ 是比较常见的一种形式，例如 $\lambda(x)=x$，$\lambda(x)=-x$，$\lambda(x)=ax$，$\lambda(x)=ax^2$ 等.

例 4.2.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，且 $f(a)=f(b)=0$，证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$2f'(\xi) + (\xi - a)f''(\xi) = 0 .$$

证 构造辅助函数

$$F(x) = (x-a)^2 f'(x),$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$F'(x) = 2(x-a)f'(x) + (x-a)^2 f''(x),$$

从而 $F'_+(a)=0$．而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，故在 (a,b) 内至少存在一点 η，使 $f'(\eta)=0$，从而 $F'(\eta)=0$．从而 $F(x)$ 在 $[a,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，因此至少存在一点 $\xi \in (a,\eta) \subset (a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $2f'(\xi)+(\xi-a)f''(\xi)=0$.

注 本题证明的关键在于辅助函数的构造，所证结论 $2f'(\xi)+(\xi-a)f''(\xi)=0$ 等式两边同时乘以 $(\xi-a)$，即有

$$2(\xi-a)f'(\xi)+(\xi-a)^2 f''(\xi)=0,$$

因此上式可以理解为 $[(x-a)^2 f'(x)]'\Big|_{x=\xi}=0$，因此辅助函数 $F(x)=(x-a)^2 f'(x)$.

例 4.2.3 【2001 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$f'(0)=f'(1)=0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

分析　本题证明的关键在于构造辅助函数，所证结论可以理解为 $[f''(x)-f(x)]_{x=\xi}=0$，构造的辅助函数 $F(x)$ 的导数 $F'(x)$ 应该包含 $f''(x)-f(x)$. 构造 $F_1(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，$F_2(x)=\mathrm{e}^{-x}f'(x)$，则

$$F_1'(x)=\mathrm{e}^{-x}f'(x)-\mathrm{e}^{-x}f(x),\quad F_2'(x)=\mathrm{e}^{-x}f''(x)-\mathrm{e}^{-x}f'(x),$$

显然 $F_1'(x)+F_2'(x)$ 就包含着 $f''(x)-f(x)$.

证　构造辅助函数

$$F(x)=[f(x)+f'(x)]\mathrm{e}^{-x},$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)$，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$[f''(\xi)-f(\xi)]\mathrm{e}^{-\xi}=0,$$

从而 $f''(\xi)=f(\xi)$，结论得证.

例 4.2.4　【1994 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明在 $[0,1]$ 上存在不同的两点 x_1 和 x_2，使得

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2.$$

证　因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\frac{1}{2}$. 显然函数 $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上满足拉格朗日定理的条件，因此至少存在两点 $x_1\in(0,\xi)\subset[0,1]$ 和 $x_2\in(\xi,1)\subset[0,1]$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0},\quad f'(x_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi},$$

因此有

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{\xi}{f(\xi)-f(0)}+\frac{1-\xi}{f(1)-f(\xi)}=2.$$

注　本题的结论可以推广到更一般的情况，见本章习题 4.3.5.

例 4.2.5　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内至少存在两点 ξ 和 η，使得

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

证　函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

另一方面，$f(x)$ 与 $g(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上利用柯西中值定理，则至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2},$$

两式相比，整理得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

注　本题中出现了两个中值 ξ 和 η，因此需要使用两次中值定理，这里使用了拉格朗日中值定理和柯西中值定理，技巧性较高.

例 4.2.6　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$. 证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$.

分析　本题有两个中值 ξ 和 η，因此需要利用两次中值定理. 首先需要恒等变形，使得含有 ξ,η 的部分分别在等式的一边，再利用中值定理. 所证等式化为

$$\mathrm{e}^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=\mathrm{e}^{\xi},$$

等式左端可以理解为 $\left[f(x)\mathrm{e}^x\right]'\Big|_{x=\eta}$，等式的右端可以理解为 $(\mathrm{e}^x)\Big|_{x=\xi}$，因此可以考虑使用两次拉格朗日中值定理.

证　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^x,$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理得，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a),$$

结合 $f(a)=f(b)=1$，整理得

$$\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)](b-a).$$

函数 e^x 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理，从而存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^{\xi}(b-a)$. 从而 $\mathrm{e}^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=\mathrm{e}^{\xi}$，即 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$.

例 4.2.7　【1998、2010 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$0\leqslant a<b\leqslant\frac{\pi}{2},$$

证明在区间 (a,b) 内至少存在两点 ξ_1 和 ξ_2，使得

$$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}.$$

分析　所证结论可以整理为

$$\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}\tan\frac{a+b}{2}=\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1},$$

可以看出 $f(x)$ 和 $\cos x$ 在 $[a,b]$ 上使用了一次柯西中值定理，$f(x)$ 和 $\sin x$ 在 $[a,b]$ 上使用了一次柯西中值定理.

证　$f(x)$ 和 $\sin x$ 在 $[a,b]$ 上利用柯西中值定理，则至少存在一点 $\xi_1\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}.$$

$f(x)$ 和 $\cos x$ 在 $[a,b]$ 上利用柯西中值定理，则至少存在一点 $\xi_2\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\cos b-\cos a}=\frac{f'(\xi_2)}{-\sin\xi_2},$$

两式相比，整理可得 $f'(\xi_2)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\dfrac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$，结论得证.

4.2.2　题型二、利用中值定理证明不等式问题

例 4.2.8　设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$ ，证明：$(b-a)\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}<\ln^2 b-\ln^2 a<\dfrac{2}{\mathrm{e}}(b-a)$.

证　设 $f(x)=\ln^2 x$，显然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理得，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=f'(\xi)(b-a)=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),$$

设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，当 $x\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 时，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上单调递减，因此有

$$\frac{2}{\mathrm{e}^2}=\frac{\ln\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}<\frac{\ln\xi}{\xi}<\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

因此有

$$(b-a)\frac{4}{\mathrm{e}^2}<\ln^2 b-\ln^2 a<\frac{2}{\mathrm{e}}(b-a).$$

注　(1) 不等式中的 $\ln^2 b-\ln^2 a$ 为函数 $\ln^2 x$ 在 $x=b$ 和 $x=a$ 两点的差，因此可以尝试使用拉格朗日中值定理.

(2) 这里需要利用 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调性进行放缩，若简单利用 $\mathrm{e}<a<\xi<b<\mathrm{e}^2$ 进行放缩，例如

$$\frac{2}{\mathrm{e}^2}=\frac{2\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2}<\frac{2\ln\xi}{\xi}<\frac{2\ln\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}}=\frac{4}{\mathrm{e}},$$

则无法得到所证结论.

例 4.2.9　设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f(c)\neq f(a)$.

(1) 若 $f(c)>f(a)$，由题设条件，$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续，在 (a,c) 内可导，由拉格朗日中值定理可知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.$$

（2）若 $f(c)<f(a)$，在 $[c,b]$ 上利用拉格朗日中值定理，则在 (c,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0 .$$

综上，结论成立.

注　利用罗尔定理只能得到 $f'(\xi)=0$，而不等式的证明一般利用拉格朗日中值定理．事实上，本题的条件不变，还可以得到 $f'(\xi)<0$，见本章习题 4.3.10.

例 4.2.10　设 $f(x)$ 为 x 的非线性函数，且在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=a$，$f(b)=b$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>1$.

证法 1　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-x,$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m．若 $M=m$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数，从而 $f(x)$ 为 x 的线性函数，因此 $M\neq m$．又因为 $F(a)=F(b)=0$，所以 M 和 m 至少有一个在 (a,b) 内部取到，不妨设 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $F(x_0)=m$，此时 $m<0$，由拉格朗日中值定理可知，$\exists\xi\in(x_0,b)\subset(a,b)$，使得

$$F(b)-F(x_0)=F'(\xi)(b-x_0)$$

从而有 $F'(\xi)>0$，即有 $f'(\xi)>1$.

证法 2　若 $f(x)$ 为 x 的线性函数，且 $f(a)=a$，$f(b)=b$，则有 $f(x)=x$,而 $f(x)$ 为 x 的非线性函数，因此一定存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)\neq x_0$.

（1）若 $f(x_0)>x_0$，在 $[a,x_0]$ 上利用拉格朗日中值定理，得

$$f(x_0)-f(a)=f'(\xi)(x_0-a),$$

所以

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>\frac{x_0-a}{x_0-a}=1 .$$

（2）若 $f(x_0)<x_0$，在 $[x_0,b]$ 上利用拉格朗日中值定理，得

$$f(b)-f(x_0)=f'(\xi)(b-x_0),$$

所以

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>\frac{b-x_0}{b-x_0}=1 .$$

综上，结论得证.

注　（1）若 M 在 (a,b) 内部取到，例如 $F(x_0)=M$，则 $M>0$，此时在 $[a,x_0]$ 上利用拉格朗日中值定理即可.

（2）事实上，本题的条件不变，还可以得到 $f'(\xi)<1$，见本章习题 4.3.11.

****例 4.2.11**　设 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ f(1)=\frac{1}{2}$，$f(x)$ 具有二阶连续导数，求证 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geqslant 2$.

证　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-x^2+ax,$$

显然 $F(x)$ 满足 $F''(x)=f''(x)-2$，同时有 $F(0)=F\left(\frac{1}{2}\right)=F(1)$，经计算

$$F(x)=f(x)-x^2+\frac{1}{2}x\ .$$

因为 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续，因此存在最大值 M_1 和最小值 m_1，分类讨论.

（1）若 $m_1=M_1$，则 $\exists\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $F'(\xi_1)=0$；

（2）$m_1\neq M_1$，则 M_1 和 m_1 至少有一个在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内部取到．若不妨设 M_1 在区间内部取到，即存在 $\exists\eta_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $F(\eta_1)=M_1$，则由拉格朗日中值定理可得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(\eta_1)=F'(\xi_1)\left(\frac{1}{2}-\eta_1\right),$$

其中 $\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$（在不引起歧义的条件下，这里也用 ξ_1），因此 $F'(\xi_1)<0$. 综上 $\exists\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $F'(\xi_1)\leqslant 0$.

类似的方法，可以证明 $\exists\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F'(\xi_2)\geqslant 0$（该部分证明可以参见本题的附录）．$F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 利用拉格朗日中值定理可得，$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$F'(\xi_2)-F'(\xi_1)=F''(\xi)(\xi_2-\xi_1),$$

即 $F''(\xi)\geqslant 0$. 因此结论成立.

注　辅助函数 $F(x)$ 的构造满足 $F''(x)=f''(x)-2$，同时有 $F(0)=F\left(\frac{1}{2}\right)=F(1)$，因此给出了 $F(x)=f(x)-x^2+ax$ 的形式.

例 4.2.11 的附录

以下是证明 $\exists\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F'(\xi_2)\geq 0$ 成立的过程.（该部分考试时可省略）

因为 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续，因此存在最大值 M_2 和最小值 m_2，分类讨论.

（1）若 $m_2=M_2$，则 $\exists\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F'(\xi_2)=0$；

（2）若 $m_2\neq M_2$,则 M_2 和 m_2 至少有一个在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内部取到，不妨设 M_2 在区间内部取到，即 $\exists\eta_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F(\eta_2)=M_2$，则由拉格朗日中值定理可得

$$F(\eta_2)-F\left(\frac{1}{2}\right)=F'(\xi_2)\left(\eta_2-\frac{1}{2}\right),$$

其中 $\xi_2 \in \left(\dfrac{1}{2},1\right)$（不引起歧义的条件下，这里也用 ξ_2）. 即有 $F'(\xi_2)>0$. 综上存在 $\xi_2 \in \left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $F'(\xi_2)\geqslant 0$. 结论得证.

例 4.2.12 【1999 年陕西省竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $|f''(\xi)|\geqslant 4\dfrac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.

证 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处分别泰勒展开，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2,$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2,$$

其中 ξ_1 介于 x 与 a 之间，ξ_2 介于 x 与 b 之间，将 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 代入上式，结合条件 $f'(a)=f'(b)=0$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

其中 ξ_1 介于 a 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间，ξ_2 介于 $\dfrac{a+b}{2}$ 与 b 之间，两式相减，得

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&=\frac{1}{8}(b-a)^2\left|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right|\\&\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)\end{aligned}$$

记 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{4}(b-a)^2|f''(\xi)|,$$

从而结论得证.

****例 4.2.13** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，对于 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)$ 满足 $f(x)\geqslant 0$，$f''(x)\leqslant 0$，试证明不等式 $f(x)\leqslant\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证 由题意知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定取得最大值，不妨设 x_0 为函数的一个最大值点，将 $f(x_0)$ 在 x 处泰勒展开，有

$$f(x_0)=f(x)+f'(x)(x_0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_0-x)^2,$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间. 由于 $f''(x)<0$，所以 $f(x_0)\leqslant f(x)+f'(x)(x_0-x)$，因此

$$\int_a^b f(x_0)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)(x_0-x)\,\mathrm{d}x,$$

整理得

$$f(x_0)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x_0 - x)\,\mathrm{d}f(x),$$

而

$$\begin{aligned}\int_a^b (x_0 - x)\,\mathrm{d}f(x) &= (x_0 - x)f(x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(b)(x_0 - b) - f(a)(x_0 - a) + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 $f(x_0)(b-a) \leqslant 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，从而 $f(x_0) \leqslant \dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$．故对于 $\forall x \in [a,b]$，有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注　（1）泰勒公式的使用是非常灵活的，不仅可以将 $f(x)$ 在某一点展开，也可以将某个函数值在 x 处展开.

（2）要证明函数 $f(x) \leqslant a$，只需要证明函数的最大值 $M \leqslant a$ 即可.

4.2.3　题型三、利用中值定理证明恒等式

例 4.2.14　证明当 $x \geqslant 1$ 时，恒有 $\arctan x + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2}$.

证　构造辅助函数

$$F(x) = \arctan x + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2},$$

则 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，当 $x \in (1,+\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} \equiv 0,\end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理的推论可知，当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$F(x) \equiv C$．又因为 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续，因此

$$F(1) = \lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} C = C,$$

而 $F(1) = \arctan 1 + \dfrac{1}{2}\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$，故 $C = \dfrac{\pi}{2}$，所以当 $x \geqslant 1$ 时，有

$$\arctan x+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

注 在证明恒等式时，通常利用拉格朗日中值定理的推论来证明. 将恒等式化为 $f(x)=C$ 的形式，证明 $f'(x)\equiv 0$. 然后再利用特殊值来确定常数 C 的值. 如果 $f(x)$ 在所给区间端点处连续，这时可以利用单侧连续性获得函数的端点值.

4.2.4 题型四、函数的零点、方程的根的问题

函数的零点、方程根的问题是导数应用的一个重要内容，本书将在 5.2.4 节对该专题做进一步的讨论.

例4.2.15 设实数 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ 满足 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=0$ ，证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

证 构造辅助函数

$$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$ ，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ ，使得 $F'(\xi)=0$ ，即有

$$a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_n\xi^n=0,$$

从而 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

注 本题虽然形式是找函数零点问题，但其本质与例 4.2.1 属于同一类型. 证明的关键还是构造辅助函数 $F(x)$ ，使得 $F'(x)=f(x)$ 或者 $F'(x)=f(x)\phi(x)$ ，其中 $\phi(x)\neq 0$. 这里也可以利用不定积分来构造辅助函数，即

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\mathrm{d}x.$$

例 4.2.16 【2008 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(a)>0$ ，$f'(a)<0$, 而当 $x>a$ 时，$f''(x)\leqslant 0$, 证明在 $(a,+\infty)$ 内，方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根.

证 由于当 $x>a$ 时， $f''(x)\leqslant 0$ ，因此 $f'(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调递减，从而有

$$f'(x)\leqslant f'(a)<0,$$

于是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调递减. 所以 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内最多有一个实根.

下面证明 $f(x)=0$ 至少有一个实根. 当 $x>a$ 时，由拉格朗日中值定理有

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\leqslant f'(a)(x-a),$$

即

$$f(x)\leqslant f(a)+f'(a)(x-a),$$

上式右端当 $x\to+\infty$ 时趋于 $-\infty$ ，因此 $\exists b>a$ ，使得 $f(b)<0$ ，由零点定理存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f(\xi)=0$.

综上所述，可知在 $(a,+\infty)$ 内方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根.

注 证明 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根的问题，一般分为两个子问题，即 $f(x)=0$ 至少有一

个实根，$f(x)=0$ 至多有一个实根．至少有一个实根一般利用零点定理证明，至多有一个实根一般通过函数的单调性来证明．

例 4.2.17 【2005 年北京市竞赛题】 证明方程 $2^x=x^2+1$ 有且仅有三个实根．

证　构造辅助函数

$$f(x)=2^x-x^2-1.$$

显然 $f(0)=f(1)=0$，又因为 $f(2)=-1<0$，$f(5)=6>0$，$f(x)$ 在 $[2,5]$ 上连续，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(2,6)$，使得 $f(\xi)=0$，从而 $f(x)=0$ 至少有三个实根．

下面证明 $f(x)=0$ 至多有三个实根．

利用反证法．若 $f(x)=0$ 有四个或者四个以上的实根，因为 $f(x)$ 任意阶可导，则由罗尔定理可知，$f'''(x)=0$ 至少有一个实根，而 $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3>0$，矛盾．所以 $f(x)=0$ 至多有三个实根．

综上方程 $2^x=x^2+1$ 有且仅有三个实根．

注　证明 $f(x)=0$ 有且仅有 k 个实根的问题，一般分为两个子问题，即 $f(x)=0$ 至少有 k 个实根，$f(x)=0$ 至多有 k 个实根．至少有 k 个实根一般利用零点定理证明，至多有 k 个实根一般通过罗尔定理来证明．

4.2.5　题型五、利用泰勒公式求极限

例 4.2.18　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin(x^2)}$．

解　当 $x\to 0$ 时，

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2!}x^2+o(x^2),$$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2),$$

所以

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2!}x^4+o(x^4),$$

$$\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4),$$

因此

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)}{\left[-\dfrac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right]x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)}{-\dfrac{3}{2}x^4+o\left(x^4\right)}=-\frac{1}{12}.$$

例 4.2.19　【1988 年南京理工大学竞赛题】　求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x}\right].$$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)$

$$+\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\left[1-\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}-1+1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\left[-\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\left(-\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{12}+0=-\frac{1}{12}.$$

注　当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

例 4.2.20　【1999 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3,$$

试求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解法 1　由于

$$\mathrm{e}^3=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]\right\},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=3,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，将 $f(x)$ 进行麦克劳林展开，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),\quad x\to 0,$$

因此

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[x+\frac{1}{x}\left(f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{o(x^2)}{x^2}\right],$$

所以 $f(0)=0$， $f'(0)=0$， $f''(0)=4$．因此

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}\right]=\mathrm{e}^2 .$$

解法 2　由于

$$\mathrm{e}^3=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]\right\},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=3,$$

因此有

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=0,$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$．又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,$$

利用等价无穷小量替换，

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=1+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2},$$

所以有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

所以 $f''(0)=4$．利用对数恒等式，结合等价无穷小量替换，有

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\right]=\mathrm{e}^2 .$$

注　从解法 2 中可以看出，本题的条件可以减弱，只需要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶导数即可.

例 4.2.21　【2008 年北京市竞赛题】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$.

解　结合对数恒等式和等价无穷小量替换定理，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty} n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\mathrm{e}^{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right]\\&=\mathrm{e}\cdot\lim_{n\to\infty} n^2\left[(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].\end{aligned}$$

利用泰勒展开，当 $n\to\infty$ 时，

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

类似可得

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{3(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

从而

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n(n+1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以

$$\text{原式}=\mathrm{e}\cdot\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{2n(n+1)}-o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

注　（1）当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n+o(x^n)$.

（2）在本例中，使用了带有皮亚诺余项的泰勒公式．对于某些表达式代数和的极限问题，等价无穷小量替换往往会失效，这时可以考虑利用泰勒展开式进行求解.

例 4.2.22　【2013、2004 年北京市竞赛题】 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在区间 $[0,x]$（$x>0$）上应用拉格朗日中值定理得 $\mathrm{e}^x-1=x\mathrm{e}^{x\theta}$，其中 $0<\theta<1$，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

解　由题意，

$$\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x-1}{x},$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\theta&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-1\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注　本题给出了函数 $f(x)$ 的表达式，因此可以将 θ 的显示表达式求解出来，结合等价无穷小量代换定理及洛必达法则容易求出相应极限．但如果 $f(x)$ 的表达式未知，θ 的显示表达式将无法求解．例如，例 4.2.23 和例 4.2.24．

例 4.2.23　设 $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$，其中 $0<\theta<1$，$f''(x)$ 连续且 $f''(x_0)\neq 0$，试求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

解　利用泰勒展开，得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0+\theta_1 h)，\quad 0<\theta_1<1，$$

又因为

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)，$$

两式相减，整理得到

$$h[f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)]=\frac{h^2}{2}f''(x_0+\theta_1 h)，$$

函数 $f'(x)$ 在 $[x_0,x_0+\theta h]$（或 $[x_0+\theta h,x_0]$）上利用拉格朗日中值定理可得

$$h\cdot f''(x_0+\theta_2 h)\theta h=\frac{h^2}{2}f''(x_0+\theta_1 h)，$$

即

$$f''(x_0+\theta_2 h)\theta=\frac{1}{2}f''(x_0+\theta_1 h)．$$

因为 $f''(x)$ 连续，上式两边同时取极限，得

$$f''(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}f''(x_0)．$$

由题设，$f''(x_0)\neq 0$，因此有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

注　（1）显然，例 4.2.22 是本题的一个特例；（2）本题在 2014 年北京市竞赛中曾经考过，但所给的条件有所减弱，因此解题过程也有所区别，具体参见附录 2014 年北京市大学生数学竞赛（经济管理类）试题．

例 4.2.24　设 $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)$，其中 $0<\theta<1$，$f^{(n+1)}(x)$ 连续且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

解　利用泰勒展开，得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta_1 h)，$$

又因为

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)，$$

两式相减，整理得到

$$0=\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_0+\theta h)-f^{(n)}(x_0)]-\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta_1 h),$$

函数 $f^{(n)}(x)$ 在 $[x_0,x_0+\theta h]$（或 $[x_0+\theta h,\ x_0]$）上利用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{h^n}{n!}\cdot\theta h f^{(n+1)}(x_0+\theta_2 h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta_1 h),$$

即

$$\theta f^{(n+1)}(x_0+\theta_2 h)=\frac{1}{(n+1)}f^{(n+1)}(x_0+\theta_1 h)$$

因为 $f^{(n+1)}(x)$ 连续，且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$，上式两边同时取极限，容易得到 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

注 显然，例 4.2.23 是本题的一个特例.

4.2.6 题型六、利用泰勒公式证明等式

例 4.2.25 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)+\frac{1}{2}f'(\xi).$$

分析 由于本题中出现了 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$f(0)$ 及 $f'(\xi)$，可以尝试使用麦克劳林展开.

证 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$，由麦克劳林展开公式，对于 $\forall x>0$，则至少存在一点 $\xi\in(0,x)$，使得

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2!}F''(\xi)x^2,$$

取 $x=1$，从而 $F(1)=F(0)+F'(0)+\dfrac{1}{2!}F''(\xi)$，即

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)+\frac{1}{2}f'(\xi),$$

结论得证.

注 本题还可以推广到一般情况，见本章习题 4.3.16.

4.2.7 题型七、利用泰勒公式证明不等式

例 4.2.27 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f'(0)=f'(1)=0$，试证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $|f''(\xi)|\geqslant 4|f(1)-f(0)|$.

证 将函数 $f(x)$ 分别在 $x=0$ 和 $x=1$ 处泰勒展开，则存在 $\xi_1\in(0,x)$ 和 $\xi_2\in(x,1)$，使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2,$$

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-1)^2,$$

因此有

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\cdot\frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)+f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\cdot\frac{1}{4},$$

两式相减得

$$f(1)-f(0)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)]\cdot\frac{1}{4}=0,$$

因此

$$4\left|f(1)-f(0)\right|=\frac{1}{2}\left|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|f''(\xi_2)\right|+\left|f''(\xi_1)\right|,$$

取 $f''(\xi)=\max\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\}$，则有

$$4\left|f(1)-f(0)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|+\left|f''(\xi)\right|,$$

即 $|f''(\xi)|\geqslant 4|f(1)-f(0)|$，结论得证.

例 4.2.28　【2013 年北京市竞赛题】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，则

$$|f'(x)|\leqslant 2a+\frac{b}{2},\quad x\in[0,1].$$

证　对于 $\forall x\in(0,1)$，由泰勒公式可得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2,\quad \xi_1\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2,\quad \xi_2\in(x,1)$$

两式相减，整理可得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$$

两边取绝对值可得

$$\begin{aligned}|f'(x)|&\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{x^2}{2}|f''(\xi_1)|+\frac{(1-x)^2}{2}|f''(\xi_2)|\\&\leqslant 2a+\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right]b\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}.\end{aligned}$$

下面证明在 $x=0$，$x=1$ 处的导数也满足关系式 $|f'(x)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$. 将 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处进行泰勒展开，则至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得

$$f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-0)^2,$$

因此有 $f'(0)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}f''(\eta)$，从而有 $|f'(0)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$，类似方法可以证明

$$|f'(1)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}.$$

综上，结论得证.

4.2.8　题型八、泰勒公式的其他应用

例 4.2.29　【2007 年北京市竞赛题】证明 $\sin 1$ 为无理数.

证　利用反证法．假设 $\sin 1$ 为有理数，则 $\sin 1=\frac{p}{q}$，其中 p,q 为互质的正整数.

而 $\sin x$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林展开式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right),$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间．因此

$$\frac{p}{q}=\sin 1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\sin\left(\xi_1+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$$

其中 ξ_1 介于 0 与 1 之间．等式两边同时乘以 $(2n-1)!$，得

$$(2n-1)!\cdot\frac{p}{q}=(2n-1)!\cdot\left[1-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\right]+\frac{(-1)^n}{(2n)(2n+1)}\sin\left(\xi_1+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right),$$

当 n 足够大，不妨设 $2n-1>q$，则等式的左边为正整数，等式右边的第一部分为整数，因此，$\frac{(-1)^n}{(2n)(2n+1)}\sin\left(\xi_1+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$ 一定为整数，事实上，$\left|\sin\left(\xi_1+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1$，$2n>1$，因此 $\frac{(-1)^n}{(2n)(2n+1)}\sin\left(\xi_1+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$ 不可能为整数，矛盾，说明假设错误，故 $\sin 1$ 为无理数.

4.3　深 化 训 练

4.3.1　填空题

（1）【2004 年北京市竞赛题】 在 $x=0$ 的附近与函数 $f(x)=\sec x$ 的差为 x^2 的高阶无穷小的二次多项式为________.

（2）【2007 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$ 与 $f(1)-f(0)$ 的大小关系为________.

（3）当 $x\to 0$ 时，若 $\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}+\sin(x^3)$ 是 x^k 的同阶无穷小量，则 $k=$________.

4.3.2　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)$.

4.3.3 【2003 年考研题】设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，$f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，试证必存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$．

4.3.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，其中 $a>0$，$f(a)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{b-\xi}{2a}f(\xi)$．

4.3.5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明对于任意的正数 a 和 b，在 $(0,1)$ 上存在不同的两点 x_1 和 x_2，使得

$$\frac{a}{f'(x_1)}+\frac{b}{f'(x_2)}=a+b.$$

4.3.6 【2016 年全国竞赛预赛题】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，证明在 $(0,1)$ 上存在不同的两点 x_1 和 x_2，使得

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{2}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

4.3.7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在 $0<\xi<\eta<1$，使得对 $\forall a,b>0$，成立 $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$．

4.3.8 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f(c)\ (a<c<b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$．

4.3.9 【2012 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，过两点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $(c,f(c))$，其中 $a<c<b$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$．

4.3.10 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)<0$．

4.3.11 设 $f(x)$ 为 x 的非线性函数，且在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，$f(b)=b$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)<1$．

4.3.12 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)$，其中 n 为某个正整数．

****4.3.13** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶导数，$f(b)=0$，$F(x)=(x-a)^3f(x)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $F'''(\xi)=0$．

4.3.14 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，又知 $f(0)<0$，证明 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有两个实根．

4.3.15 【2011 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant f(x)\leqslant 2$，且对 $\forall x\in(0,1)$，有 $f(x)\neq 2$，证明在 $[0,1]$ 上有且仅有一点 ξ，使得 $f(\xi)=2\xi$．

4.3.16 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(b-a)+\frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2.$$

4.3.17 【2002 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且在 $(0,a)$ 内取得

最小值，当 $x\in[0,a]$ 时，$|f''(x)|\leqslant M$，证明 $|f'(0)+f'(a)|\leqslant Ma$．

4.3.18　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\ln(1+2x^2)\tan x}$．

4.3.19【2012 年北京市竞赛题】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$．

4.3.20　证明 e 为无理数．

4.3.21　设 $f(x)$ 二阶可导，$K_0=\sup\limits_x|f(x)|$，$M=\sup\limits_x\left\{[f'(x)]^2\right\}$，$K_2=\sup\limits_x|f''(x)|$，证明 $M\leqslant 2K_0K_2$．

4.4　深化训练详解

4.3.1　填空题

（1）$1+\dfrac{1}{2}x^2$；**提示** 利用 $f(x)=\sec x$ 的麦克劳林展开式 $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$．

（2）$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$；

（3）2．

4.3.2　使用拉格朗日中值定理．记 $f(x)=\arctan x$，则至少存在一点 ξ 介于 $\dfrac{a}{x}$ 和 $\dfrac{a}{x+1}$ 之间，使得

$$f\left(\frac{a}{x}\right)-f\left(\frac{a}{x+1}\right)=f'(\xi)\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right),$$

即有

$$\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right),$$

当 $x\to\infty$ 时，$\xi\to 0$．从而有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\cdot\frac{a}{x(x+1)}=a\ .$$

4.3.3　已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，则 $m=\dfrac{3m}{3}\leqslant\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant\dfrac{3M}{3}=M$，

由介值定理知，至少存在一点 $\eta\in[0,2]$，使得 $f(\eta)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$．又因为 $f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上连续，在 $(\eta,3)$ 内可导，且 $f(\eta)=f(3)$，利用罗尔定理得，必存在点 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$．

4.3.4　**提示** 构造辅助函数 $F(x)=(b-x)^{2a}f(x)$，然后 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理即可．

4.3.5　因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$．显然函数 $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上满足拉格朗日定理的条件，因此至少存在两点 $x_1\in(0,\xi)\subset[0,1]$

和 $x_1\in(\xi,1)\subset[0,1]$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}，\quad f'(x_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}，$$

因此有

$$\frac{a}{f'(x_1)}+\frac{b}{f'(x_2)}=\frac{a\xi}{f(\xi)-f(0)}+\frac{b(1-\xi)}{f(1)-f(\xi)}=a+b\ .$$

4.3.6　设 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，则 $F(0)=0$，$F(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$．因为 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=\frac{1}{2}F(1)$．显然函数 $F(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上满足拉格朗日定理的条件，因此至少存在两点 $x_1\in(0,\xi)\subset[0,1]$ 和 $x_1\in(\xi,1)\subset[0,1]$，使得

$$f(x_1)=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0}，\quad f(x_2)=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}，$$

因此有

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{\xi}{F(\xi)-F(0)}+\frac{1-\xi}{F(1)-F(\xi)}=\frac{2}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\ .$$

4.3.7　要使得结论 $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$ 成立，只需证明 $\frac{a}{a+b}f'(\xi)+\frac{b}{a+b}f'(\eta)=1$ 成立即可．令 $c=\frac{a}{a+b}$，分别在 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上利用拉格朗日中值定理得

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)(c-0)，\quad \xi\in(0,c)；$$
$$f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)，\quad \eta\in(c,1)，$$

上述两式相加即可得到结论．

4.3.8　$f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上分别利用罗尔定理，则至少存在两点 $\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$．又因为函数 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

4.3.9　函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上分别用拉格朗日中值定理，则至少存在两点 $\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}，\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}，$$

而 $f'(\xi_1)$ 和 $f'(\xi_2)$ 均为过两点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线的斜率，因此 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$．又因为函数 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，因此，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

4.3.10　**提示**　证明过程同例 4.3.9，具体过程略.

4.3.11　**提示**　证明过程同例 4.3.10，具体过程略.

4.3.12　当 $n=1$ 时，所证结论为 $f'(\xi)=0$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，由

罗尔定理可知，结论显然成立．当$n\neq 1$时，构造辅助函数$F(x)=f(x)-xf\left(\frac{1}{n}\right)$，则$F(0)=0$，$F(1)=-f\left(\frac{1}{n}\right)$．若$f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，所证结论为$f'(\xi)=0$，则$f(x)$在$[0,1]$上利用罗尔定理即可证明结论．若$f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 0$，则

$$F\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

从而$F\left(\frac{1}{n}\right)$与$F(1)$一定异号，由零点定理可知，至少存在一定$\eta\in\left(\frac{1}{n},1\right)$，使得$F(\eta)=0$．$F(x)$在$[0,\eta]$上利用罗尔定理即可证明结论．

4.3.13　由于$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理可知，至少存在一点$\xi_1\in(a,b)$，使得$F'(\xi_1)=0$．当$x\in(a,b)$时，

$$F'(x)=3(x-a)^2f(x)+(x-a)^3f'(x),\quad F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}F'(x)=0,$$

所以$F'(x)$在$[a,\xi_1]$上用罗尔定理可得，至少存在一点$\xi_2\in(a,\xi_1)$，使得$F''(\xi_2)=0$．当$x\in(a,b)$时，

$$F''(x)=6(x-a)f(x)+6(x-a)^2f'(x)+(x-a)^3f''(x),$$

在$x=a$处，$F''_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}F''(x)=0$，函数$F''(x)$在$[a,\xi_2]$上满足罗尔定理的条件，因此至少存在一点$\xi\in(a,\xi_2)\subset(a,b)$，使得$F'''(\xi)=0$，结论得证．

注　$F(x)$在$[a,b]$上具有三阶导数，可以推出$F'(x)$和$F''(x)$在$x=a$处均右连续．

4.3.14　首先证明$f(x)=0$至少存在两个实根．因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha$，因此一定存在充分大的$M>0$，使得当$x>M$，有$f'(x)>\frac{\alpha}{2}$，在$[M,x]$上利用拉格朗日中值定理，至少存在一定$\xi\in(M,x)$，使得

$$f(x)-f(M)=f'(\xi)(x-M)>\frac{\alpha}{2}(x-M),$$

因此

$$f(x)>\frac{\alpha}{2}(x-M)+f(M),$$

当x充分大时，$f(x)>0$，不妨设存在充分大的点$b>0$，使得$f(b)>0$．由零点定理可知，至少存在一点$x_1\in(0,b)$，使得$f(x_1)=0$．类似方法可以证明存在一个充分小的点$a<0$，使得$f(a)>0$，由零点定理可知，至少存在一点$x_2\in(a,0)$，使得$f(x_2)=0$．因此$f(x)=0$至少存在两个实根．

下面证明$f(x)=0$至多有两个实根．利用反证法．假设$f(x)=0$有三个或三个以上的实根，则由罗尔定理可知，至少存在一定η，使得$f''(\eta)=0$，这与题设$f''(x)>0$矛盾．因此假设错误，即$f(x)=0$至多有两个实根．

综上，$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$内有且仅有两个实根．

4.3.15　构造辅助函数 $F(x)=f(x)-2x$．首先证明至少存在一点满足 $f(\xi)=2\xi$．由于 $F(0)=f(0)\geqslant 0$，$F(1)=f(1)-2\leqslant 0$，因此由连续函数的零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $F(\xi)=0$，即有 $f(\xi)=2\xi$．

下面证明至多存在一点满足 $f(\xi)=2\xi$．假设 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有两个或两个以上的零点，则根据罗尔定理可知，至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$，因此有 $f(\eta)=2$，与题设矛盾．因此至多存在一点满足 $f(\xi)=2\xi$．

综上，在 $[0,1]$ 上有且仅有一点 ξ，使得 $f(\xi)=2\xi$．

4.3.16　证明略．

4.3.17　由题意知，$\exists x_0\in(0,a)$，使得 $f'(x_0)=0$，$f'(x)$ 分别在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,a]$ 上利用拉格朗日中值定理，至少存在两点 $\xi_1\in(0,x_0)$ 和 $\xi_2\in(x_0,a)$

$$f'(x_0)-f'(0)=f''(\xi_1)(x_0-0),\quad f'(a)-f'(x_0)=f''(\xi_2)(a-x_0),$$

所以 $|f'(0)|\leqslant Mx_0$，$|f'(a)|\leqslant M(a-x_0)$，因此有 $|f'(0)+f'(a)|\leqslant Ma$．

4.3.18　利用泰勒展开，当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),$$

$$\tan x=\tan 0+\sec^2 0\cdot x+0\cdot x^2+\frac{2}{3!}x^3+o(x^3)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

从而

$$\tan(\sin x)=\sin x+\frac{1}{3}(\sin x)^3+o(x^3)=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3!}(\sin x)^3+o(x^3)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

所以

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{6}x^3-x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{2x^3}=\frac{1}{4}.$$

4.3.19　利用麦克劳林展开，当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),$$

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3!}(\sin x)^3+o(x^3)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

结合等价无穷小量替换和麦克劳林展开式有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{3!}x^3-x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

4.3.20　**提示**　利用反证法．假设 e 为有理数，则

$$\mathrm{e}=\frac{p}{q}，其中\ p,q\ 为互质的正整数.$$

利用麦克劳林展开式即可证明．

4.3.21　对于任意的 x 和 h，利用泰勒展开，有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2,$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2,$$

其中 ξ_1 介于 x 和 $x+h$ 之间，ξ_2 介于 x 和 $x-h$ 之间，两式相减得

$$2f'(x)h=[f(x+h)-f(x-h)]-\frac{1}{2}h^2[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$

因此

$$2|f'(x)|h\leqslant\frac{1}{2}h^2[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]+|f(x+h)|+|f(x-h)|\leqslant K_2h^2+2K_0,$$

从而有 $K_2h^2-2|f'(x)|h+2K_0\geqslant 0$．根据二次式的根的判别定理可知，

$$4|f'(x)|^2-8K_0K_2\leqslant 0,$$

即 $|f'(x)|^2\leqslant 2K_0K_2$，从而有 $M\leqslant 2K_0K_2$，结论得证.

第 5 章　导数的应用

5.1　知 识 要 点

本章主要内容包括洛必达法则、函数的单调性、极值与最值、曲线的凹凸性、渐近线，函数图形的描绘，以及曲率等。

5.1.1　洛必达法则

洛必达法则主要用来求解$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式的极限，若在自变量的某个变化过程中，$f(x)$和$g(x)$都趋于0，或者$f(x)$和$g(x)$都趋于∞，且$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$），其中$g'(x)\neq 0$，则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\text{（或}\infty\text{）}.$$

对于一些其他类型的不定式，例如$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，0^0型，∞^0型，1^∞型等类型，需要转化成$\dfrac{0}{0}$型或者$\dfrac{\infty}{\infty}$型的不定式，再使用洛必达法则进行计算.

5.1.2　函数的单调性

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，若在(a,b)内$f'(x)>0$，则$y=f(x)$在$[a,b]$上单调递增；若在(a,b)内$f'(x)<0$，则$y=f(x)$在$[a,b]$上单调递减.

需要注意的是，如果函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内除有限个点处满足$f'(x)=0$外，其余点处均有$f'(x)>0(<0)$，则$y=f(x)$在$[a,b]$上仍单调递增（递减）.

5.1.3　函数的极值与最值

（1）函数的极值点要么是驻点，要么是函数的不可导点.

（2）极值的第一充分条件主要是通过点x_0左右邻域内$f'(x)$的符号进行判断．若x_0点处的左邻域内$f'(x)>0$，右邻域内$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0点处取得极大值；若左邻域内$f'(x)<0$，右邻域内$f'(x)>0$，则$f\left(x\right)$在x_0点处取得极小值.

（3）极值的第二充分条件是利用$f''(x_0)$的符号进行判断，若$f(x)$在x_0点满足$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则若$f''(x_0)<0$，则$f(x)$在x_0点处取得极大值；若$f''(x_0)>0$，则$f\left(x\right)$在x_0点处取得极小值．需要注意的是，若$f''(x_0)=0$，这时可以利用更高阶导数的符号进行判断，见例 5.2.14.

（4）闭区间上函数的最值要么在区间的端点上取到，要么在区间内部的极值点上取到.

5.1.4　曲线的凹凸区间与拐点

（1）曲线的拐点要么在$f''(x)=0$的点处取到，要么在$f''(x)$不存在的点处取到.

（2）曲线的凹凸性主要通过 $f''(x)$ 的符号来判断，若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

（3）若 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续， $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在，但 $f''(x)$ 在 x_0 点的两侧异号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为图形的拐点.

5.1.5　曲线的渐近线

曲线的渐近线分为三类，水平渐近线、铅垂渐近线和斜渐近线.

（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=c$，则 $y=c$ 为函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的铅垂渐近线.

（3）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax-b]=0$，其中 $a\neq0$，则 $y=ax+b$ 为函数 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

需要注意的在求解铅垂渐近线时，x_0 一般是函数 $f(x)$ 无意义的点. 另外，$y=\ln x$ 很特殊，$x=0$ 为 $y=\ln x$ 的铅垂渐近线，做题时不能漏掉.

5.1.6　函数图形的描绘

利用导数描绘函数图形的一般步骤为：

（1）确定函数的定义域，研究函数的特性（如奇偶性、周期性等）；

（2）求出 $f'(x)$， $f''(x)$，以及它们在定义域内的全部零点和无意义的点；

（3）函数的间断点、驻点、一阶导数不存在的点、二阶导数为零的点，以及二阶导数不存在的点等将定义域分成若干个区间，在每个区间分别讨论 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，确定函数的单调性与极值，凹凸性与拐点；

（4）求解函数的渐近线；

（5）补充一些特殊点，如曲线与坐标轴的交点等，描绘出一张较为精确的函数图形.

*5.1.7　曲率、曲率圆与曲率半径

曲率主要用来研究曲线的弯曲程度. 设 $f(x)$ 存在二阶导数（此时 $f'(x)$ 连续，因此曲线是光滑的）， $y=f(x)$ 在点 $M\big(x,f(x)\big)$ 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M\big(x,f(x)\big)$ 处的曲率为 K（ $K\neq0$ ），作曲线在点 M 处的法线，在凹向一侧的法线上取一点 D，以 $|DM|=\dfrac{1}{K}$ 为半径，以点 D 为圆心作圆，该圆称为曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的**曲率圆**，曲率圆的半径 $\rho=\dfrac{1}{K}$ 叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的**曲率半径**.

5.2　典型例题分析

5.2.1　题型一、洛必达法则的应用

例 5.2.1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{1-x}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1}{1-x}}{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{1-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{e}^x}{2}=-\frac{1}{2}.$$

注　洛必达法则可以重复使用，但在使用洛必达法则的时候，一定要与其他方法结合起来使用，解题过程才更为简捷.

例 5.2.2　【2008 年北京市竞赛题】　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left[\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^6}}\right]=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\left(1-t-\dfrac{1}{2}t^2\right)\mathrm{e}^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t-\dfrac{6t^5}{2\sqrt{1+t^6}}}{3t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t-\dfrac{6t^3}{2\sqrt{1+t^6}}}{3}=\frac{1}{6}.$$

注　本题属于 $\infty-\infty$ 类型的未定式，一个基本的思想是“抓大头”，即将趋于无穷大速度最快的部分提出来，然后使用倒代换，再利用洛必达法则求解即可.

例 5.2.3　【2009 年北京市竞赛题】　设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0$， $f'(1)=1$，则极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x\left(t\int_t^1 f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t}{(x-1)^3}$ ________.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u}{3(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u}{3(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-f(x)}{6(x-1)}$

$$=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{1}{6}f'(1)=-\frac{1}{6}.$$

例 5.2.4　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{\ln n}{n^2}}$.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{\ln n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\ln n}{n^2}\ln(n!)\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}\ln(n!)\right\},$$

而

$$0\leqslant\frac{\ln n}{n^2}\ln(n!)=\frac{\ln n}{n^2}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)\leqslant\frac{n\ln n\cdot\ln n}{n^2}=\frac{(\ln n)^2}{n},$$

根据洛必达法则，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$，由海涅定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n}=0$，根据夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}\ln(n!)=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{\ln n}{n^2}}=\mathrm{e}^0=1$.

注　本题属于 ∞^0 类型的未定式，解题过程中综合运用了洛必达法则、海涅定理、夹逼定理等方法，具有较强的综合性.

例 5.2.5　【2011 年全国竞赛预赛题】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}$.

解　由题意可知，

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]\right]=0.$$

因此由洛必达法可知，

$$原极限=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]\right]'.$$

又因为

$$\begin{aligned}\left[(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]\right]'&=\left[\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]\right]'\\&=\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}\cdot\left(\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x^2}\ln(1+x)\right)+\frac{\mathrm{e}^2}{1+x}\\&=2\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}+\frac{\mathrm{e}^2}{1+x},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}原极限&=2\mathrm{e}^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}+\mathrm{e}^2=2\mathrm{e}^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x(1+x)+x^2}+\mathrm{e}^2\\&=2\mathrm{e}^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)+x^2}+\mathrm{e}^2=2\mathrm{e}^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)+x}+\mathrm{e}^2\\&=2\mathrm{e}^2\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{e}^2=0.\end{aligned}$$

例 5.2.6　【2014 年考研题】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

解　根据等价无穷小量替换公式，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}.$$

记 $f(t)=t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t$，当 $t\to+\infty$ 时，根据泰勒展开式，有

$$f(t)=t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t=t^2\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]-t=\frac{1}{2}+o(1),$$

因此，根据广义积分的几何意义可知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t=\infty,$$

故结合洛必达法则和麦克劳林展开式，有

$$原极限=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]=\frac{1}{2}.$$

注　本题在使用洛必达法则时，应该首先验证该题是否适用洛必达法则的条件，即是否属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 类型.

例 5.2.7　【2013 年考研题】当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

解　根据等价无穷小量的定义，有

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)}{ax^n}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)+2\cos x\sin(2x)\cos(3x)+3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}},\end{aligned}$$

由于当 $n=2$ 时，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{1}{2a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos x\sin(2x)\cos(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{4}{2a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{9}{2a},$$

因此 $\frac{1+4+9}{2a}=1$，解得 $a=7$．当 $n\neq2$ 时，显然不符合题意．故 $n=2$，$a=7$.

5.2.2 题型二、利用单调性或极值证明不等式

例 5.2.8 【2012 年考研题】对于 $\forall x\in(-1,1)$，证明不等式 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{1}{2}x^2$ 成立.

证 构造辅助函数

$$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{1}{2}x^2,\quad x\in(-1,1),$$

则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1,$$

当 $x\in(-1,\ 1)$ 时，$f''(x)\geqslant 4-1-1>0$，因此 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调递增. 又 $f'(0)=0$，因此当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，最小值为 $f(0)=0$，故当 $x\in(-1,1)$ 时 $f(x)\geqslant f(0)=0$，结论得证.

例 5.2.9 【2007 年北京市竞赛题】 设整数 $n>1$，证明不等式 $\dfrac{1}{2n\mathrm{e}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{1}{n\mathrm{e}}$.

分析 为了构造辅助函数，首先将不等式整理成比较简单的形式.

$$\frac{1}{2n\mathrm{e}}<\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}>0;$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{n\mathrm{e}} \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0.$$

证 （1）先证不等式 $\dfrac{1}{2n\mathrm{e}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$，即证明

$$\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}>0.$$

构造辅助函数

$$f(x)=x\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\ln(1-x)-x,\quad x\in[0,1),$$

当 $x\in(0,1)$ 时，

$$f'(x)=\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2-x}+\frac{1}{1-x}-1,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2-x}-\frac{2}{(2-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x(x^2+5x+5)}{(2-x)^2(1-x)^2}>0,$$

所以 $f'(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，因此当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 单调递增，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>f(0)=0$，故

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}>0,$$

结论得证.

（2）证明不等式$\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{n\mathrm{e}}$，即证明$\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0$即可．构造辅助函数

$$f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x,\quad x\in[0,1).$$

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)=-\ln(1-x)>0$，所以$f(x)$在$[0,1)$上单调递增．因此当$x\in(0,1)$时，$f(x)>f(0)=0$，因此 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}>0$，结论得证.

例 5.2.10　设$b>a>0$，求证不等式 $\ln\left(\frac{b}{a}\right)>\frac{2(b-a)}{b+a}$成立.

分析　欲证明不等式$\ln\left(\frac{b}{a}\right)>\frac{2(b-a)}{b+a}$成立，对只需证明

$$(b+a)(\ln b-\ln a)-2(b-a)>0$$

成立即可.

证　构造辅助函数

$$f(x)=(\ln x-\ln a)\cdot(x+a)-2(x-a),$$

则$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且当$x>a$时，

$$f'(x)=\frac{x+a}{x}+(\ln x-\ln a)-2=\frac{a}{x}+(\ln x-\ln a)-1,$$

$$f''(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2},$$

由于$x>a$时，$f''(x)>0$，所以$f'(x)$在$[a,+\infty)$上单调递增，$f'(x)>f'(a)=0$.

故$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调递增，即有$x>a>0$时，$f(x)>f(a)=0$．所以当$b>a>0$时，$f(b)>0$，即有$\ln\left(\frac{b}{a}\right)>\frac{2(b-a)}{b+a}$成立.

****例 5.2.11**【2007 年北京市竞赛题】在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，试比较函数$\tan(\sin x)$与$\sin(\tan x)$的大小，并证明你的结论.

分析　由三角函数的性质，当$\sin x>\frac{\pi}{4}$时，$\tan(\sin x)>1$，当$0<\sin x<\frac{\pi}{4}$时，$\tan(\sin x)<1$，而对于$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin(\tan x)\leqslant 1$，因此本题需要分类讨论.

解　当$\arcsin\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$时，即有$\frac{\pi}{4}<\sin x<1$，从而$\tan(\sin x)>1$，而对于任意的$x$，$\sin(\tan x)\leqslant 1$，故有

$$\tan(\sin x)>\sin(\tan x).$$

当$x=\arcsin\frac{\pi}{4}$时，$\tan(\sin x)=1$，而

$$\tan\left(\arcsin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{16-\pi^2}},$$

$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{\sqrt{16-\pi^2}}<\frac{\pi}{2}$，因此 $\frac{\pi}{3}<\tan\left(\arcsin\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$，故有 $\sin\left[\tan\left(\arcsin\frac{\pi}{4}\right)\right]<1$，因此当 $x=\arcsin\frac{\pi}{4}$ 时，$\tan(\sin x)>\sin(\tan x)$．当 $0<x<\arcsin\frac{\pi}{4}$ 时，构造辅助函数

$$f(x)=\tan(\sin x)-\sin(\tan x),$$

则

$$f'(x)=\sec^2(\sin x)\cos x-\cos(\tan x)\sec^2 x=\frac{\cos^3 x-\cos(\tan x)\cos^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)\cos^2 x},$$

当 $0<x<\arcsin\frac{\pi}{4}$ 时，显然 $0<\tan x<\frac{\pi}{2}$， $0<\sin x<\frac{\pi}{4}$，由于余弦函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内上凸，因此

$$\sqrt[3]{\cos(\tan x)\cos^2(\sin x)}\leqslant\frac{1}{3}[\cos(\tan x)+2\cos(\sin x)]\leqslant\cos\frac{\tan x+2\sin x}{3}.$$

设 $\phi(x)=\tan x+2\sin x-3x$，则当 $0<x<\arcsin\frac{\pi}{4}$ 时,

$$\phi'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3=\tan^2 x-4\sin^2\frac{x}{2}>0,$$

从而 $\tan x+2\sin x>3x$，故

$$\cos(\tan x)\cos^2(\sin x)<\cos^3 x,\quad \tan(\sin x)>\sin(\tan x).$$

综上，对于 $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，总有 $\tan(\sin x)>\sin(\tan x)$．

5.2.3　题型三、函数的极值问题

例 5.2.12　【2013 年全国竞赛预赛题】设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y=y(x)$ 的极值.

解　方程两边对 x 求导数，将 y 视为 x 的函数，得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0,$$

因此 $y'=\frac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令 $y'=0$，得 $x=0$ 或 $x=-2y$．将 $x=0$ 和 $x=-2y$ 分别代入原方程，得

$$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases},\quad\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases},$$

又因为

$$y''=\frac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)+(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2},$$

且 $y''\big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=-1<0$，$y''\big|_{\substack{x=-2\\y=1}}=1>0$，因此函数 $y=y(x)$ 的极大值为 $y(0)=-1$，极小值为 $y(-2)=1$.

例 5.2.13 【2007 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x} & x>0\\ x+1 & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的极值.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^{2x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{2x\ln x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=1,\quad f(0)=1,$$

因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．又因为

$$f'(x)=\begin{cases}2(\ln x+1)x^{2x} & x>0\\ 1 & x<0\end{cases},$$

令 $f'(x)=0$，得到驻点 $x=\mathrm{e}^{-1}$．　分段点 $x=0$ 和驻点 $x=\mathrm{e}^{-1}$ 将函数 $f(x)$ 的定义域分成三部分．当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\mathrm{e}^{-1}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\mathrm{e}^{-1}$ 时，$f'(x)>0$，因此 $x=0$ 为极大值点，$x=\mathrm{e}^{-1}$ 为极限值点，且极大值 $f(0)=1$，极小值 $f(\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}^{-2\mathrm{e}^{-1}}$．

注　对于分段函数而言，若函数在分段点处连续，则分段点也可能为函数的极值点.

例 5.2.14　设 $f(x)$ 在 x_0 处具有连续的 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，证明：

（1）当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极值；

（2）当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$ 为 $f(x_0)$ 的拐点.

证　（1）$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间，结合题设得到

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

由于 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处连续且 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，因此在 x_0 的某个邻域内 $f^{(n)}(\xi)\neq 0$，且 $f^{(n)}(\xi)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 符号一致．若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $f(x)\leqslant f(x_0)$；若 $f^{(n)}(x_0)>0$，$f(x)\geqslant f(x_0)$，结论（1）成立.

（2）$f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开，有

$$f''(x)=f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2},$$

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间，结合题设得到

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}.$$

当 n 为奇数时，$f''(x)$ 在 x_0 的左右邻域内符号发生变化，因此结论（2）成立.

***例 5.2.15** 【2013 年北京市竞赛题】 设半径为 r 的圆与某条直线 l 相切，切点为 O，过圆上的一点 P 作切线 l 的垂线，垂足为 Q. 试求由点 P、Q 及切点 O 所构成的三角形的最大面积.

解 以切点 O 为原点，切线 l 为 x 轴建立如图 5.1 所示的坐标系，此时圆的方程为

$$x^2+(y-r)^2=r^2.$$

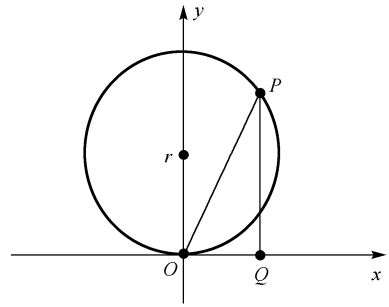

图 5.1

设 P 点的坐标为 (x,y)，根据对称性，只需讨论点 P 位于右半圆上即可. 三角形 ΔPOQ 的面积为 $\frac{1}{2}xy$. 由于 $x=\sqrt{2ry-y^2}$，$0\leqslant y\leqslant 2r$,从而三角形 ΔPOQ 的面积可表示为 y 的函数 $f(y)$，且有

$$f(y)=\frac{y\sqrt{2ry-y^2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2ry^3-y^4},\quad 0\leqslant y\leqslant 2r.$$

显然函数 $f(y)$ 在闭区间 $[0,2r]$ 上连续，因此一定存在最大值和最小值，又因为 $f(0)=f(2r)=0$，因此最大值一定在区间 $(0,2r)$ 内部取到. 令 $f'(y)=\dfrac{6ry^2-4y^3}{4\sqrt{2ry^3-y^4}}=0$，解得唯一的驻点 $y=\dfrac{3r}{2}$. 因此函数 $f(y)$ 在区间 $[0,2r]$ 上的最大值为 $f\left(\dfrac{3r}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}r^2$.

***例 5.2.16** 【2006 年北京市竞赛题】分针和时针在零点重合后，两针针尖间的距离逐渐由小变大，再由大变小，经过 $\dfrac{12}{11}$ 小时后再次重合，设时针和分针的长度分别为 a 和 $2a$，问两针尖相离的速度何时达到最大.

解 时针的角速度为每小时 $\dfrac{\pi}{6}$，分针的角度为每小时 2π，因此当 $t\in\left[0,\dfrac{6}{11}\right]$ 时，时针分针分别转过的角度为 $\dfrac{\pi}{6}t$ 和 $2\pi t$，此时，时针和分针的针尖位置分别为

$$A\left(a\sin\frac{\pi t}{6},a\cos\frac{\pi t}{6}\right),\quad B(2a\sin(2\pi t),2a\cos(2\pi t)).$$

因此 A 点和 B 点两点之间的距离为

$$S=\sqrt{\left(2a\sin(2\pi t)-a\sin\frac{\pi t}{6}\right)^2+\left(2a\cos(2\pi t)-a\cos\frac{\pi t}{6}\right)^2}$$
$$=a\sqrt{5-4\cos\frac{11\pi t}{6}},\quad t\in\left[0,\frac{6}{11}\right],$$

两针尖分离的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{11\pi a}{3}\cdot\frac{\sin\frac{11\pi t}{6}}{\sqrt{5-4\cos\frac{11\pi t}{6}}}.$$

当 $t\in\left(0,\dfrac{6}{11}\right)$ 时，

$$v'=-\frac{121\pi^2 a}{18}\cdot\frac{2\cos^2\left(\dfrac{11\pi t}{6}\right)-5\cos\left(\dfrac{11\pi t}{6}\right)+2}{\left(5-4\cos\dfrac{11\pi t}{6}\right)^{3/2}}.$$

令 $v'=0$，解得唯一驻点 $t=\dfrac{2}{11}$，即分针和时针在零点重合后，在 $\dfrac{2}{11}$ 小时后两针针尖分离的速度达到最大.

注　由对称性，本题只需讨论 $t\in\left[0,\dfrac{6}{11}\right]$ 内的情况即可. 另外本题用到了两角差的三角公式 $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$.

5.2.4　题型四、函数的零点、方程的根的问题

例 5.2.17　讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$ 的零点.

解　当 $x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $x>3$ 时，$f(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 内无零点. 当 $x\in(1,3)$ 时，对函数求导得

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}.$$

在 $(1,2)$ 与 $(2,3)$ 内， $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 内均单调减少. 又因为

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)=-\infty,$$

所以在 $(1,2)$ 内，函数 $f(x)$ 有一个零点. 同理在 $(2,3)$ 内，函数 $f(x)$ 有一个零点. 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有两个零点，分别在 $(1,2)$ 与 $(2,3)$ 内.

例 5.2.18　【2004 年北京市竞赛题】设常数 $a>1$， $b>0$，为使方程 $\log_a x=x^b$ 存在实根，求 a 和 b 应满足的条件.

解　由题意知， $x>0$，将方程整理为 $\dfrac{\ln x}{x^b}=\ln a$． 构造辅助函数

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^b},\quad x\in(0,+\infty),$$

函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}^b}>0,$$

因此函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得最大值. 令 $f'(x)=\dfrac{1-b\ln x}{x^{b+1}}=0$，得到唯一的驻点 $x=\mathrm{e}^{\frac{1}{b}}$，

因此函数在 $x=\mathrm{e}^{\frac{1}{b}}$ 处取得最大值，最大值为 $f(\mathrm{e}^{\frac{1}{b}})=\dfrac{1}{b\mathrm{e}}$，因此当 $\dfrac{1}{b\mathrm{e}}\geqslant \ln a$ 时，方程 $\log_a x=x^b$ 存在实根.

5.2.5　题型五、凹凸性问题

例 5.2.19　对于任意的实数 a 和 b，证明不等式 $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)\geqslant \mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}$ 成立.

证　设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f''(x)=\mathrm{e}^x>0$，因此函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的图像是凹的，故对于任意的实数 a 和 b，$\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)\geqslant \mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}$.

例 5.2.20　讨论摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 的凹凸性.

解　由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}\\&=\frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}\\&=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},\end{aligned}$$

当 $2k\pi<t<2(k+1)\pi$（其中 k 为整数）时，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$，因此摆线是上凸的.

5.2.6　题型六、渐近线问题

例 5.2.21　求曲线 $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 的渐近线.

解　由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-1}}=-1,$$

因此 $y=f(x)$ 存在两条水平渐近线 $y=1$ 和 $y=-1$. 又因为

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\infty,\qquad \lim_{x\to-1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\infty,$$

因此 $y=f(x)$ 存在两条垂直渐近线 $x=1$ 和 $x=-1$.

注　对于单值函数 $y=f(x)$ 而言，在同一个水平方向上（沿 x 轴正向或 x 轴负向），水平渐近线和斜渐近线不可能同时存在．本题沿着 x 轴正向和沿 x 轴负向都存在水平渐近线，因此在这两个方向上一定不存在斜渐近线．故不需要讨论斜渐近线.

例 5.2.22　求曲线 $y=f(x)=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$ 的渐近线方程.

解　由于

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)=\infty,$$

因此 $y=f(x)$ 没有水平渐近线．而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}+t}=0,$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^-}f(x)=\lim_{x\to\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^-}x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)=\infty,$$

因此 $y=f(x)$ 有一条垂直渐近线 $x=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．又因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)-1\right]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\mathrm{e}+t}}{1}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

因此 $y=f(x)$ 有一条斜渐近线 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

注　(1) 本题沿着 x 轴正向（$x\to+\infty$）或 x 轴负向（$x\to-\infty$）都没有水平渐近线，因此在这两个方向上可能存在斜渐近线，故需要验证斜渐近线是否存在.

(2) 在求渐近线时，对数函数 $y=\ln x$ 非常特殊，$x\to0^+$ 时，$\ln x\to\infty$，因此 $x=0$ 为函数 $y=\ln x$ 的一条垂直渐近线．对于本题而言，当 $x\to\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^-$ 等价于 $\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\to0^+$，因此 $x=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 有可能是曲线的垂直渐近线.

例 5.2.23　求 $y=f(x)=(1+x)\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

解　由于

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(1+x)\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}=\infty,$$

因此 $y=f(x)$ 没有水平渐近线，可能存在斜渐近线.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(1+x)\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}=+\infty,$$

因此 $y=f(x)$ 有一条垂直渐近线 $x=0$．又因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{x}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}=\mathrm{e},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-\mathrm{e}x]=\lim_{x\to\infty}\left((1+x)\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}-\mathrm{e}x\right)=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\left(x\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}-\mathrm{e}x\right)$$

$$=\mathrm{e}+\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1\right)=\mathrm{e}+\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}\,x\left(-\frac{1}{x}\right)=0,$$

因此 $y=f(x)$ 有一条斜渐近线 $y=\mathrm{e}x$.

5.2.7　题型七、函数图形的描绘

例 5.2.24　【2005 年北京市竞赛题】设函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-2|}$，作函数的图形.

分析　按 $x<0$， $0<x<2$ 及 $x>2$ 分段讨论函数的性态.

解　当 $x<0$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3-x},\quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{2}{(3-x)^3},$$

因此有 $f'(x)>0$， $f''(x)>0$. 当 $0<x<2$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3-x},\quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}+\frac{2}{(3-x)^3},$$

显然 $f''(x)>0$；令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=1$，且 $f''(1)>0$，因此 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点；当 $0<x<1$ 时， $f'(x)<0$，当 $1<x<2$ 时， $f'(x)>0$. 当 $x>2$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x-1},\quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}+\frac{2}{(x-1)^3},$$

故有

$$f'(x)<0,\quad f''(x)>0 .$$

又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，故 $y=0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线. 极大值点 $f(0)=\dfrac{4}{3}$，$f(2)=\dfrac{4}{3}$，函数的图像如图 5.2 所示.

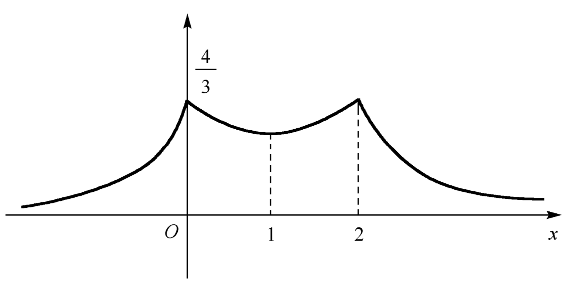

图 5.2

5.2.8　题型八、方程的近似解

***例 5.2.25**　【2012 年全国竞赛预赛题】求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到 0.001.

解 利用泰勒公式，存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $\sin x = x-\dfrac{1}{2}x^2\sin(\theta x)$，因此有

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right),$$

原方程化为 $x-501=-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\theta}{x}\right)$. 故有 $x>500$，从而 $0<\dfrac{\theta}{x}<\dfrac{1}{500}$，而

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{x}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{500}=0.001,$$

因此，方程的近似解可以取为 $x=501$.

*5.2.9　题型九、曲率问题

例 5.2.26　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(0<b<a)$ 的曲率与曲率半径.

解　由于

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+x\cdot\dfrac{b^2x}{a^2y}}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3},$$

因此曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\dfrac{b^4}{a^2|y^3|}}{\left(1+\dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{3/2}}=\frac{b^4}{a^2|y^3|}\cdot\left(\frac{a^4y^2}{a^4y^2+b^4x^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

例 5.2.27　求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$ 在一拱 $(0<t<2\pi)$ 内的曲率半径的最大值.

解　由例 5.2.20 可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t},\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},$$

因此曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=a(1-\cos t)^2\cdot\left(1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right)^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}=4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

当 $t=\pi$ 时，曲率半径得到最大，最大值为 $4a$.

5.3 深化训练

5.3.1 单项选择题

（1）【2014 年考研题】设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上（　　）.

（A）当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$；　　（B）当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$；

（C）当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$；　　（D）当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

（2）设 $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{2\sqrt{2}x}{\pi} & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$，则 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 与 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 分别为（　　）.

（A）极小值点，不是拐点；　　（B）极大值点，不是拐点；

（C）极小值点，拐点；　　（D）极大值点，拐点.

（3）【2014 年考研题】设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$. 当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是（　　）.

（A）$a=0$；　　（B）$b=1$；　　（C）$c=0$；　　（D）$d=\dfrac{1}{6}$.

（4）【2011 年考研题】曲线 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点为（　　）.

（A）$(1,0)$；　　（B）$(2,0)$；　　（C）$(3,0)$；　　（D）$(4,0)$.

（5）【2012 年考研题】曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为（　　）.

（A）0；　　（B）1；　　（C）2；　　（D）3.

（6）【2007 年考研题】曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线的条数为（　　）.

（A）0；　　（B）1；　　（C）2；　　（D）3.

5.3.2 填空题

（1）【2008 年考研题】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=$________.

（2）【2011 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 满足方程

$$(x-1)f''(x)+2(x-1)[f'(x)]^3=1-\mathrm{e}^{1-x},$$

若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，则它是________.（填写极大值还是极小值）

（3）【2004 年北京市竞赛题】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}-1-x^3}{\sin^6(2x)}$ ________.

5.3.3 求解下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\ln(1+\arctan x)}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}-1-x^3}{(1-\cos x^2)\ln(1+2x^2)}$；

（4）【2010 年全国竞赛预赛题】$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$；

（5）【2012 年考研题】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

5.3.4　函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t}$.

5.3.5　设非线性函数 $y=f(x)$ 是由方程 $x^3-3xy^2+2y^3=32$ 确定的隐函数，且 $f(x)$ 可导，试求函数 $f(x)$ 的极值.

5.3.6　证明下列不等式：

（1）$e^{\pi}>\pi^{e}$；　　（2）$\sqrt{2015}^{\sqrt{2016}}>\sqrt{2016}^{\sqrt{2015}}$.

5.3.7　证明当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，不等式 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$ 成立.

5.3.8　证明当 $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 时，$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$.

5.3.9　证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$1<\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2<1+(1-4\pi^{-2})x^2$.

5.3.10　证明方程 $1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}=0$ 无实根.

5.3.11　【2011 年考研题】求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

5.3.12　试求最大的实数 α 和最小的实数 β，使得对任意的正整数 n，均有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

5.3.13　讨论函数 $y=e^{-\frac{1}{x}}$ 的性态，并作出函数的图像.

***5.3.14**　求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（$a>0$）的曲率半径.

***5.3.15**　求曲线 $y=\ln x$ 上曲率半径的最小值.

***5.3.16**　在重力场中，将某一质点在竖直平面 Oxy 内从 $A(x,y)$ 点以初速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛出，试建立该质点的运动方程（空气阻力忽略不计），计算该质点的运动速度、加速度、质点的最大上升高度及最远抛出距离.

5.4　深化训练详解

5.3.1　（1）D；本题考查了曲线凹凸性的概念．当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，曲线 $f(x)$ 为凹的，如图 5.3 所示.

曲线 $y=g(x)$ 为连接点 $(0,f(0))$ 和 $(1,f(1))$ 的直线段，根据凹凸性的定义，显然有 $f(x)\leqslant g(x)$.

注　本题也可以利用辅助函数方法．构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x .$$

由于

$$F(0)=F(1)=0 ,\quad F''(x)=f''(x) ,$$

因此当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是凹的，故当 $x\in[0,1]$ 时，有 $F(x)\leqslant F(0)=F(1)=0$，从而有 $f(x)\leqslant g(x)$.

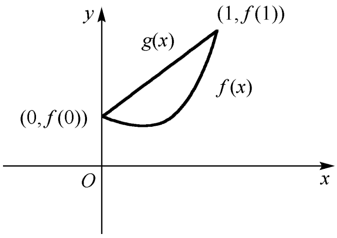

图 5.3

（2）A；

（3）D；**提示**　利用麦克劳林展开式，有 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，从而

$$p(x)-\tan x=a+(b-1)x+cx^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)x^3=o(x^3) .$$

故 $a=0$，$b=1$，$c=0$，$d=\dfrac{1}{3}$.

本题也可以利用洛必达法则求解．由于 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=0 .$$

可推知 $\lim\limits_{x\to 0}(a+bx+cx^2+dx^3-\tan x)=0$，解得 $a=0$．由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{b+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=0 ,$$

可推知 $\lim\limits_{x\to 0}(b+2cx+3dx^2-\sec^2 x)=0$，解得 $b=1$．因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2cx+3dx^2-\tan^2 x}{3x^2}=0 ,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2c}{3x}+d-\frac{\tan^2 x}{3x^2}\right)=0 ,$$

因此，$c=0$，$d=\dfrac{1}{3}$.

（4）C；**提示**　由于函数 $y=y(x)$ 是一个10次的多项式，因此曲线在 $(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$ 内要么是凹的，要么是凸的．又因为

$$\frac{f(1)+f(2)}{2}=0>f\left(\frac{1+2}{2}\right),$$

$$\frac{f(2)+f(3)}{2}=0>f\left(\frac{2+3}{2}\right),$$

$$\frac{f(3)+f(4)}{2}=0<f\left(\frac{3+4}{2}\right),$$

因此，可以推知曲线在 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 内是凹的，在 $(3,4)$ 内是凸的，因此 $(3,0)$ 点为曲线的拐点.

（5）C；

（6）D；**提示**　由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0,$$

因此，曲线有一条水平渐近线 $y=0$．由于

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\infty,$$

因此，曲线有一条铅垂渐近线 $x=0$．又因为

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[y-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)=0,$$

因此，曲线有一条斜渐近线 $y=x$．

5.3.2　（1）$-\frac{1}{6}$；**提示**　结合等价无穷小量替换方法和洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sin x-x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

（2）极小值；**提示**　由题意可知，函数 $f(x)$ 任意阶可导，因此 $f''(x)$ 和 $f'(x)$ 均为连续函数，当 $x\neq1$ 时，

$$f''(x)+2[f'(x)]^3=\frac{1-\mathrm{e}^{1-x}}{x-1}.$$

等式两边同时求极限，结合函数 $f''(x)$ 和 $f'(x)$ 的连续性，有

$$f''(0)+2[f'(0)]^3=\lim_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

又因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，因此 $f'(0)=0$，故 $f''(0)=1>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值.

（3）$\frac{1}{128}$．

5.3.3　（1）$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\frac{\sin x-x}{x}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\right\}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

（2）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}\ln(1+2x)\right]$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x^2}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x}-\frac{2}{1+2x}}{4x}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)-(1+x)}{2x(1+x)(1+2x)}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)(1+2x)}=\frac{e}{2}.$$

（3）$\dfrac{1}{2}$.

（4）原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\exp\left\{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left\{-x+x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[-x+x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\right\}=\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\frac{-t+\ln(1+t)}{t^2}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\frac{-1+\frac{1}{1+t}}{2t}\right\}=\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\frac{-t}{2t(1+t)}\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

（5）原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{2-2\cos x}\cdot\dfrac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\frac{1}{12}.$$

5.3.4 $\dfrac{1}{2}$；**提示** 对积分变量进行替换，即令$u=x-t$.

5.3.5 方程两边同时对x求导数，得$3x^2-3y^2-6xyy'+6y^2y'=0$，整理得

$$2y(x-y)\cdot y'=x^2-y^2,$$

由于$f(x)$是非线性函数，因此$y\neq x$，从而$y'=\dfrac{x+y}{2y}$，令$y'=0$，解得$x=-y$，代入方程$x^3-3xy^2+2y^3=32$解得，$x=-2$，$y=2$，又因为

$$y''=\frac{2y(1+y')-2y'(x+y)}{4y^2}=\frac{y-xy'}{2y^2},\quad y''\big|_{\substack{x=-2\\y=2}}=\frac{1}{4}>0,$$

所以$x=-2$为函数$y=f(x)$的极小值点，极小值为$f(-2)=2$.

5.3.6 （1）要证明$e^{\pi}>\pi^{e}$，只需证明$\pi>e\ln\pi$，即证明$\pi-e\ln\pi>0$即可．设

$$f(x) = x - \mathrm{e}\ln x \quad (x > 0).$$

令 $f'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$，得到唯一的驻点 $x = \mathrm{e}$，而 $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0$，所以 $f(x)$ 在 $x = \mathrm{e}$ 处取得最小值，最小值 $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - \mathrm{e}\ln\mathrm{e} = 0$，因此有 $f(\pi) > f(\mathrm{e}) = 0$，即 $\pi - \mathrm{e}\ln\pi > 0$，因此结论得证.

（2）解题思路同（1）类似，证明略.

5.3.7　构造辅助函数

$$f(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x) = \dfrac{2}{\pi} - \cos x$，令 $f'(x) = 0$，解得唯一的驻点 $x_0 = \arccos\dfrac{2}{\pi}$. 由于 $f''(x) = \sin x$，$f''(x_0) > 0$，所以 $f(x)$ 在 $\arccos\dfrac{2}{\pi}$ 处取得最小值. 又因为 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，故 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上一定存在最大值和最小值，而由上面的分析可知，函数的最大值只能在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 的端点上取到，而 $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$，因此函数 $f(x)$ 的最大值为 0，所以对于任意的 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，均有 $f(x) < 0$，故 $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$，结论得证.

5.3.8　证明略.

5.3.9　当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$x > \sin x$，因此 $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 > 1$. 下面证明不等式

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 < 1 + (1 - 4\pi^{-2})x^2.$$

由于 $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 \leqslant 1 + (1 - 4\pi^{-2})x^2$ 等价于 $(\sin x)^{-2} \leqslant x^{-2} + 1 - 4\pi^{-2}$，因此构造辅助函数

$$f(x) = (\sin x)^{-2} - x^{-2} - 1 + 4\pi^{-2}.$$

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$f'(x) = -2\sin^{-3}x\cos x + 2x^{-3} = 2\frac{\sin^3 x - x^3\cos x}{x^3\sin^3 x}.$$

令 $g(x) = \sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x - x$，则

$$g'(x) = \cos x\cos^{-\frac{1}{3}}x + \frac{1}{3}\sin^2 x\cos^{-\frac{4}{3}}x - 1$$

$$= \frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x + \frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x - 1 \geqslant \sqrt[3]{\cos^{\frac{4}{3}}x\cos^{-\frac{4}{3}}x} - 1 = 0,$$

从而 $\phi(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 内单调递增，故当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$g(x) > g(0) = 0$，从而 $f'(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 内单

调递增，故当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x) < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 4\pi^{-2}$，即有 $(\sin x)^{-2} \leqslant x^{-2} + 1 - 4\pi^{-2}$，结论得证.

5.3.10　构造辅助函数

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4},$$

则 $f'(x) = (x-1)(x^2+1)$，令 $f'(x) = 0$，解得唯一驻点 $x = 1$，而 $f''(x) = 1 - 2x + 3x^2$，$f''(1) > 0$，所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值，又因为 $f(1) > 0$，从而对任意的 $x \in R$，都有 $f(x) \geqslant f(1) > 0$，从而 $f(x) = 0$ 无实根.

5.3.11　令 $f(x) = k\arctan x - x$，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为奇函数，$f(0) = 0$，且

$$f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1.$$

当 $k \leqslant 1$ 时，$f'(x) < 0$（$x \neq 0$），因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递减，故 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有一个实根. 当 $k > 1$ 时，令 $f'(x) = 0$，解得 $x_1 = \sqrt{k-1}$，$x_2 = -\sqrt{k-1}$. 当 $x \in (0, \sqrt{k-1})$ 时，$f'(x) > 0$，从而 $f(x)$ 单调递增，当 $x \in (\sqrt{k-1}, +\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，从而 $f(x)$ 单调递减，故 $f(x)$ 在 $x_1 = \sqrt{k-1}$ 处取得最大值，且

$$f(\sqrt{k-1}) > f(0) = 0,$$

又因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(k\arctan x - x) = -\infty,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个实根. 由于 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内有且仅有一个实根. 综上，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有三个实根.

5.3.12　由题设可知，

$$(n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1,\quad (n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant 1,$$

从而实数 α 和 β 满足

$$\alpha \leqslant \frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} - n \leqslant \beta.$$

设 $f(x) = \dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} - x$，其中 $x \geqslant 1$，则问题转化为求函数 $f(x)$ 的最值问题. 为处理方便，令 $g(t) = \dfrac{1}{\ln(1+t)} - \dfrac{1}{t}$，$t \in (0, 1]$，则

$$g'(t) = \frac{-\dfrac{1}{1+t}}{\ln^2(1+t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{\ln^2(1+t) - \dfrac{t^2}{1+t}}{t^2\ln^2(1+t)}.$$

令 $h(t) = \ln(1+t) - \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$，则

$$h'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{\sqrt{1+t}-\dfrac{t}{2\sqrt{1+t}}}{1+t}=\frac{\sqrt{1+t}-1-\dfrac{1}{2}t}{(1+t)\sqrt{1+t}},$$

当 $t>0$ 时，由于 $\sqrt{1+t}<1+\dfrac{1}{2}t$，因此 $h'(t)<0$，从而 $g'(t)<0$，所以函数 $g(t)$ 在 $(0,1]$ 内单调递减．故函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，最大的实数 $\alpha=f(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$，最小的实数 $\beta=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，而

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to0^+}g(t)=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2},$$

因此 $\beta=\dfrac{1}{2}$．

5.3.13　函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0+\infty)$．函数的一阶、二阶导数为

$$y'=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},\quad y''=\frac{1-2x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

令 $y''=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$．列表讨论函数的性态，如表 5.1 所示．

表 5.1

x	$(-\infty,0)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
y'	+	+		+
y''	+	+		−
y	↗下凸	↗下凸	拐点 $\left(\frac{1}{2},\mathrm{e}^{-2}\right)$	↗上凸

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=1$，因此曲线有一条水平渐近线 $y=1$． $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$， $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=+\infty$，因此曲线有一条垂直渐近线 $x=0$（注意在直线 $x=0$ 的左侧存在垂直渐近线）．按照表 5.1 中列出的函数的单调性和凹凸性作出函数的图像，如图 5.4 所示．

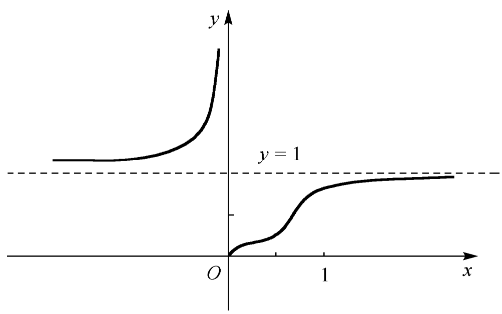

图 5.4

5.3.14　$3(a|xy|)^{\frac{1}{3}}$.

5.3.15　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$；**提示**　函数的定义域为 $(0,+\infty)$，曲线 $y=\ln x$ 的曲率半径 $R=\dfrac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$（$x>0$）．设 $f(x)=\dfrac{(1+x^2)^3}{x^2}$，只需求出 $f(x)$ 的最小值点即可.

5.3.16　该质点的运动方程为

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha \\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases},$$

其中 g 为重力加速度．质点的速度为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha+(v_0\sin\alpha-gt)^2}$$
$$=\sqrt{v_0^2+g^2t^2-2v_0gt\sin\alpha}.$$

质点的加速度为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{0+(-g)^2}=g.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0\sin\alpha-gt=0$，得到唯一驻点 $t=\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-g<0$，因此当 $t=\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$ 时，质点上升到最大高度，最大高度为

$$y_{\max}=v_0\sin\alpha\cdot\frac{v_0\sin\alpha}{g}-\frac{g}{2}\cdot\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

令 $y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2=0$，则 $t=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$，从而质点抛出的最远距离为

$$x_{\max}=v_0\cos\alpha\cdot\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}.$$

第 6 章　不 定 积 分

6.1　知 识 要 点

本章主要内容包括原函数的概念、不定积分的定义与性质、换元积分法、分部积分法及有理函数积分法.

6.1.1　不定积分的定义与性质

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在函数 $F(x)$，使得在区间 I 上处处有

$$F'(x)=f(x)，\text{或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x，$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

函数 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是 $f(x)$ 的全体原函数，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

不定积分具有如下性质：

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$；

（3）$\int\left[af(x)+bg(x)\right]\mathrm{d}x=a\int f(x)\mathrm{d}x+b\int g(x)\mathrm{d}x$.

6.1.2　换元积分法

换元积分法分为第一类换元积分法（凑微分法）和第二类换元积分法，两类换元积分法的主要区别是，第一类换元积分法可以理解为先凑微分再作变量替换，第二类换元积分法是直接变量替换. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则第一类换元积分法的思路为

$$\int g(x)\mathrm{d}x=\int f\left[\phi(x)\right]\cdot\phi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\phi(x)]\mathrm{d}\phi(x)\ \underline{\underline{u=\phi(x)}}\int f(u)\mathrm{d}u$$
$$=F(u)+C=F[\phi(x)]+C.$$

第二类换元积分法的思路为

$$\int g(x)\mathrm{d}x\ \underline{\underline{x=\phi(t)}}\int g\left[\phi(t)\right]\phi'(t)\mathrm{d}t=\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F[\phi^{-1}(x)]+C.$$

在第二类换元积分法中，还需要读者重视的几种常用的换元积分法有：

（1）若被积函数同时含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[m]{ax+b}$，可令 $t=\sqrt[N]{ax+b}$，其中 N 为 n 和 m 的最小公倍数；

（2）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$，可令 $x=a\sin t$， $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

（3）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{a^2+x^2}\ (a>0)$，可令 $x=a\tan t$， $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

（4）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{x^2-a^2}\ (a>0)$，当 $x>a$ 时，可令 $x=a\sec t$， $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x<-a$ 时，可令 $u=-x$.

（5）当被积函数分母中含有 x 的高次幂时，可尝试使用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

6.1.3 分部积分法

分部积分法主要用于求解乘积类型的积分．设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 具有连续导数，则有

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u\ .$$

分部积分法的本质是将难于计算的积分 $\int u\mathrm{d}v$ 转化为容易计算的积分 $\int v\mathrm{d}u$，因此在使用该公式时需要选择好 u 和 v，或者说关键是选择哪个函数凑微分．常用的凑微分思路有三种：

（1）幂函数与指数函数、三角函数相乘时，指数函数、三角函数凑微分；

（2）幂函数与对数函数、反三角函数相乘时，幂函数凑微分；

（3）指数函数与三角函数相乘时，哪一个凑微分都可以，使用循环积分法.

6.1.4 有理函数的积分法

利用多项式的除法可以将有理函数的积分转化为多项式与真分式的积分，而通过真分式的分解可以将真分式的积分转化为如下四大类简单真分式（部分分式）的积分.

（1）$\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x$；　　（2）$\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x\ \ (n>1)$；

（3）$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\ \ (p^2-4q<0)$；　　（4）$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\ \ (p^2-4q<0,n>1)$.

将真分式分解为部分分式之和时，若真分式的分母中含有因式 $(x-a)^k$，则分解后的式子应该含有如下表达式

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}\ ,$$

若真分式的分母中含有因式 $(x^2+px+q)^k\ (p^2-4q<0)$，则分解后的式子应该含有如下表达式

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}\ .$$

6.1.5 三角函数有理式的积分法

对于三角函数有理式的积分，主要积分方法有如下几种：

（1）对于 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 型，如果没有简易的求解方法，可以尝试利用**万能替换**方法进行求解，即令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

（2）对于 $\int\sin mx\cdot\sin nx\mathrm{d}x$，$\int\sin mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x$，$\int\cos mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x\ (m\neq n)$ 类型，可利用积化和差来计算.

（3）对于 $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\mathrm{d}x$ 类型，若当 m 、n 中有一个奇数，可拆开利用凑微分法来计算；若 m 、n 都是偶数，可利用倍角公式逐步求出不定积分.

（4）对于 $\int\sin^m x\mathrm{d}x$，$\int\cos^n x\mathrm{d}x$ 类型，可利用分部积分法导出递推公式计算，也可按（3）的特例进行处理.

6.1.6　简单无理函数的积分法

简单无理函数指形如 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$，$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ 的类型，关键是找出适当的变量代换去掉根号，化为有理函数的积分.

6.1.7　常用积分公式表

（1）$\int 0\,\mathrm{d}x=C$；

（2）$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$；

（3）$\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

（4）$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln a}a^x+C\ (a>0,a\neq1)$；

（5）$\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

（6）$\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

（7）$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

（8）$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$；

（9）$\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$；

（10）$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

（11）$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

（12）$\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$；

（13）$\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

（14）$\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$；

（15）$\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

（16）$\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C\quad(a>0)$；

（17）$\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\dfrac{x}{a}+C\quad(a>0)$；

（18）$\int\dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C\quad(a>0)$；

（19）$\int\dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C\quad(a>0)$；

（20）$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+C\quad(a>0)$；

（21）$\int\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\quad(a>0)$；

（22）$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{1}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C\quad(a>0)$.

6.2 典型例题分析

6.2.1 题型一、利用换元法、分部积分法求解不定积分

例 6.2.1 求解不定积分 $\int\dfrac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解法 1 原式 $=\int\dfrac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\csc^2 x\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)=-\cot x+\frac{1}{\sin x}+C.$$

解法 2 原式 $=\int\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\sec^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{2}\right)=\tan\dfrac{x}{2}+C$.

注 在求解不定积分时，一个常用的技巧就是将分母化为一个式子，然后将积分拆成一些简单积分的代数和．本题的两种解法用的都是这个思想．

例 6.2.2 求解不定积分 $\int\dfrac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2+x+\frac{1}{x}}{2-x-\frac{1}{x}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+x^2+1}{\sqrt{2}x-x^2-1}\right|+C.$$

注 本题也可以利用有理函数积分方法，即进行如下分解

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{1+2x^2+x^4-2x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^2-2x^2}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

通分比较同类项的系数可以得到 $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，$D=\frac{1}{2}$，然后再分别积分即可.

例 6.2.3　求解不定积分 $\int\frac{2}{1+x^6}\mathrm{d}x$.

解　由于

$$\frac{2}{1+x^6}=\frac{1+x^4}{1+x^6}+\frac{1-x^4}{1+x^6}=\frac{1+x^4}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}+\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}$$
$$=\frac{x^2+(1-x^2+x^4)}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}+\frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}$$
$$=\frac{x^2}{1+x^6}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1-x^2+x^4},$$

因为

$$\int\frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}-1+x^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1+x^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}+x\right)$$
$$=\int\frac{1}{3-\left(\frac{1}{x}+x\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}+x\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{x}+x}{\sqrt{3}-\frac{1}{x}-x}\right|+C$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+1+x^2}{\sqrt{3}x-1-x^2}\right|+C,$$

$$\int\frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C,$$

因此

$$\int\frac{2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\arctan x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+1+x^2}{\sqrt{3}x-1-x^2}\right|+C.$$

注　本题也可以利用有理函数积分方法，但解题过程非常烦琐，因此关于有理函数的积分，能进行拆分求解的尽量拆分求解.

例 6.2.4　【2011 年考研题】求解不定积分 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　原式 $=2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)\,\mathrm{d}(\sqrt{x})\ \underline{\underline{t=\sqrt{x}}}\ 2\int(\arcsin t+2\ln t)\,\mathrm{d}t$

$$=2t(\arcsin t+2\ln t)-2\int t\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$$
$$=2t(\arcsin t+2\ln t)-4t+\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}(1-t^2)$$
$$=2t(\arcsin t+2\ln t)-4t+2\sqrt{1-t^2}+C$$
$$=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-4\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$$

注　在求解不定积分时，一个常用的技巧就是见到复合函数的积分就用变量替换，有时可以直接替换，有时也可以先凑微分替换，即需要使用两类换元积分法.

例 6.2.5　求解不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}dx$.

解法 1　原式 $=\int \frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx=\int \frac{1}{e^x(e^x+1)}d(e^x)$

$$\underline{\underline{t=e^x}}\int \frac{1}{t(t+1)}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln t-\ln(t+1)+C$$

$$=x-\ln(e^x+1)+C .$$

解法 2　原式 $=\int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx=\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=x-\int \frac{1}{e^x+1}d(e^x+1)$

$$=x-\ln(e^x+1)+C .$$

例 6.2.6　求解不定积分 $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$.

解　原式 $=\int \frac{x}{(1+e^x)^2}d(e^x+1)=-\int xd(e^x+1)^{-1}=-x(e^x+1)^{-1}+\int \frac{1}{e^x+1}dx$

$$=-x(e^x+1)^{-1}+x-\ln(e^x+1)+C .$$

例 6.2.7　【2003 年考研题】　求解不定积分 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

解法 1　令 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$， $dx=\sec^2 t\,dt$， 从而

$$原式=\int \frac{e^t\tan t}{\sec^3 t}\sec^2 t dt=\int \frac{e^t\tan t}{\sec t}dt=\int \sin t\,d(e^t) .$$

利用分部积分法有

$$\int \sin t\,d(e^t)=e^t\sin t-\int e^t\cos t\,dt=e^t\sin t-\int \cos t\,d(e^t)$$

$$=e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin t\,dt ,$$

因此 $\int \sin t\,d(e^t)=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$. 由 $t=\arctan x$ 可知， $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$， $x=\tan t$， 所以

$$\sin t=\frac{\tan t}{\sec t}=\frac{\tan t}{\sqrt{\sec^2 t}}=\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} ,\quad \cos t=\frac{\sin t}{\tan t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} ,$$

故

$$原积分=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C .$$

解法 2　记 $I=\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$， 则

$$I=-\int e^{\arctan x}\,d(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=-e^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,de^{\arctan x}$$

$$=-e^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\int e^{\arctan x}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx\,,$$

$$I=\int\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\,de^{\arctan x}=e^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\int e^{\arctan x}\,d\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$=e^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\int e^{\arctan x}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx\,,$$

因此

$$I=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\frac{1}{2}e^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C\,.$$

注　正如在例 6.2.4 注解中所提及的，复合函数的积分往往采用变量替换．因此解法 1 的解题思想是比较自然的．解法 2 使用了等式 $\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u=uv+C$，技巧性比较高，该解题思想在题型二中将做进一步阐释．

例 6.2.8　$\int x\arctan x\cdot\operatorname{arccot}x\,dx$．

解　利用分部积分法，有

$$原式=\frac{1}{2}\int\arctan x\cdot\operatorname{arccot}x\,d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\cdot\operatorname{arccot}x-\frac{1}{2}\int x^2\left(\frac{\operatorname{arccot}x}{1+x^2}-\frac{\arctan x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\cdot\operatorname{arccot}x-\frac{1}{2}\int(\operatorname{arccot}x-\arctan x)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}(\operatorname{arccot}x-\arctan x)dx\,,$$

由于

$$\int(\operatorname{arccot}x-\arctan x)dx=x(\operatorname{arccot}x-\arctan x)+\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=x(\operatorname{arccot}x-\arctan x)+\ln(1+x^2)+C\,.$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}(\operatorname{arccot}x-\arctan x)dx=-\int\operatorname{arccot}x\,d(\operatorname{arccot}x)-\int\arctan x\,d(\arctan x)$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{arccot}^2x-\frac{1}{2}\arctan^2x+C\,.$$

因此

$$原积分=\frac{1}{2}x^2\arctan x\cdot\operatorname{arccot}x-\frac{1}{2}x(\operatorname{arccot}x-\arctan x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arccot}^2x-\frac{1}{4}\arctan^2x+C\,.$$

6.2.2　题型二、利用等式 $\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u=uv+C$ 求解不定积分

例 6.2.9【2008 年北京市竞赛题】$\int\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=$__________.

解　原式$=\int\dfrac{1+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}-\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C\,.$$

注　在本题中，$-\int\mathrm{e}^x\tan\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$ 与 $\int\mathrm{e}^x\tan\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$ 互相抵消后不应该为零，而是任意常数 C.

例 6.2.10【2005 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 可导，且

$$\int x^3f'(x)\mathrm{d}x=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C\,,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

解　由题意

$$x^3f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x\ -4\sin x-4x\cos x\ +6\sin x\,,$$

整理得

$$f'(x)=-\frac{2\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+\frac{2\sin x}{x^3}\,,$$

又因为

$$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}(\cos x)=-\frac{1}{x}\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\cos x-\int\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\,,$$

所以

$$\int\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\cos x+C\,.$$

类似方法可以证明

$$\int\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{2\sin x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2}\sin x+C\,,$$

因此

$$f(x)=-\frac{\sin x}{x^2}+\frac{\cos x}{x}+C\,.$$

例 6.2.11【1990 年北京市竞赛题】求解不定积分 $\int\dfrac{\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\sin(2x)}{\sin^4\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$.

解 原式$=\int \dfrac{e^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\dfrac{1}{4}\left[1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]^2}dx=8\int\dfrac{e^{-\sin x}\cdot\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}dx=8\int\dfrac{e^{-\sin x}\cdot\sin x}{(1-\sin x)^2}d(\sin x)$，

令 $t=\sin x$，则

$$\begin{aligned}
原式&=8\int\frac{e^{-t}\cdot t}{(1-t)^2}dt=-8\int e^{-t}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{(1-t)^2}\right)dt\\
&=-8\int e^{-t}\frac{1}{1-t}dt+8\int e^{-t}\frac{1}{(1-t)^2}dt=-8\int e^{-t}\frac{1}{1-t}dt+8\int e^{-t}d\frac{1}{1-t}\\
&=-8\int e^{-t}\frac{1}{1-t}dt+8e^{-t}\cdot\frac{1}{1-t}-8\int\frac{1}{1-t}de^{-t}=8e^{-t}\cdot\frac{1}{1-t}+C\\
&=8e^{-\sin x}\cdot\frac{1}{1-\sin x}+C.
\end{aligned}$$

例 6.2.12【2006年北京市竞赛题】已知 $f'(\sin x)=\cos x+\tan x+x$，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $u=\sin x$，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，则

$$f'(u)=\sqrt{1-u^2}+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}+\arcsin u,$$

因此

$$f(x)=\int\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)dx,$$

利用分部积分法，容易得到

$$\int\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)dx=x\arcsin x+C,$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+x\arcsin x+C,$$

又因为 $f(0)=1$，所以 $C=1$，故

$$f(x)=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+x\arcsin x+1.$$

6.2.3 题型三、利用三角替换方法求解不定积分

例 6.2.13 求解不定积分 $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$，其中 $a>0$.

解 当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t$，$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=a\sec t\tan t dt$，因此

$$\text{原式} = \int \frac{a^2\sec^2 t}{a\tan t} a\sec t\tan t \mathrm{d}t = a^2\int \sec^3 t\mathrm{d}t .$$

而

$$\begin{aligned}\int \sec^3 t\mathrm{d}t &= \int \sec t\mathrm{d}(\tan t) = \sec t\tan t - \int \tan t\mathrm{d}(\sec t)\\ &= \sec t\tan t - \int \tan^2 t\sec t\mathrm{d}t = \sec t\tan t - \int (\sec^2 t - 1)\sec t\mathrm{d}t\\ &= \sec t\tan t - \int \sec^3 t\mathrm{d}t + \int \sec t\mathrm{d}t ,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= a^2\int \sec^3 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\sec t\tan t + \frac{a^2}{2}\int \sec t\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}\sec t\tan t + \frac{a^2}{2}\ln|\sec t + \tan t| + C .\end{aligned}$$

又因为 $\sec t = \dfrac{x}{a}$，$\tan t = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \dfrac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$，因此

$$\text{原式} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C .$$

当 $x < -a$ 时，令 $u = -x$，则 $u > a$，从而

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\mathrm{d}x &= -\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - a^2}}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|-x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right| + C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C .\end{aligned}$$

综上，当 $|x| > a$ 时，

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C .$$

例 6.2.14　求解不定积分 $\displaystyle\int x^2\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}\mathrm{d}x$，其中 $a > 0$.

解　由题意 $-a \leqslant x < a$. 当 $-a < x < a$ 时，设 $x = a\sin t$，$t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int x^2\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}\mathrm{d}x = \int a^2\sin^2 t\frac{1 + \sin t}{\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t = a^3\int (\sin^2 t + \sin^3 t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^3}{2}\int [1 - \cos(2t)]\mathrm{d}t - a^3\int (1 - \cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)\\ &= \frac{a^3}{2}t - \frac{a^3}{4}\sin(2t) - a^3\cos t + \frac{a^3}{3}\cos^3 t + C .\end{aligned}$$

因为

$$\sin t=\frac{x}{a},\quad \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\quad t=\arcsin\frac{x}{a},\quad \sin(2t)=2\sin t\cos t,$$

故

$$\text{原式}=\frac{a^3}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{a}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

上述结果在 $x=-a$ 处也成立，即原函数在 $x=-a$ 处的右导数等于被积函数在 $x=-a$ 处的函数值．事实上，设

$$F(x)=\frac{a^3}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{a}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}},\quad f(x)=x^2\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

显然 $f(x)$ 在 $x=-a$ 处右连续，结合拉格朗日中值定理，有

$$F'_+(-a)=\lim_{x\to -a^+}\frac{F(x)-F(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a^+}F'(\xi)=\lim_{\xi\to -a^+}f(\xi)=f(-a).$$

6.2.4 题型四、求解三角有理函数的不定积分

例 6.2.15 求解不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$， $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$， $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，从而

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u\\&=\int\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u-\int\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C\\&=\frac{x}{2}+\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.\end{aligned}$$

注 三角有理函数问题一般可以通过万能替换方法将其化为有理函数的积分，然而该方法求解过程往往比较烦琐，因此能使用其他方法求解时，尽量避免使用万能替换，例如例 6.2.16.

例 6.2.16 求解不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{1}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{2}{2-\sin^2(2x)}\mathrm{d}x\ \underline{\underline{t=2x}}\ \int\frac{1}{2-\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t-\tan^2 t}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{2+\tan^2 t}\mathrm{d}(\tan t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right)+C\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}\right)+C.\end{aligned}$$

注 本题通过对被积函数进行恒等变形，并结合换元积分法给出了一种比较简捷的解法，避免了使用万能替换方法.

例 6.2.17 求解不定积分 $\int \frac{1}{\cos x\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$.

解 原式$=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(1-\sin^2 x)\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}\sin x$

$$=2\int \frac{1}{(1-\sin^2 x)}\mathrm{d}\sqrt{\sin x}\ \overline{\overline{t=\sqrt{\sin x}}}\ 2\int \frac{1}{1-t^4}\mathrm{d}t$$

$$=\int \left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1-t^2}\right]\mathrm{d}t=\arctan t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=\arctan\sqrt{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}\right|+C .$$

6.2.5 题型五、递推公式问题

例 6.2.18 试建立 $I_n=\int (\arcsin x)^n \mathrm{d}x$ 的递推公式，其中 n 为自然数.

解 当 $n=0$ 时， $I_0=\int \mathrm{d}x=x+C$ ；当 $n=1$ 时，

$$I_1=\int \arcsin x\mathrm{d}x=x\cdot\arcsin x-\int x\mathrm{d}(\arcsin x)$$

$$=x\cdot\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=x\cdot\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C ;$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$I_n=\int (\arcsin x)^n\mathrm{d}x=x(\arcsin x)^n-\int x\mathrm{d}(\arcsin x)^n$$

$$=x(\arcsin x)^n-\int\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x)^n+n\int(\arcsin x)^{n-1}\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$=x(\arcsin x)^n+n\cdot(\arcsin x)^{n-1}\cdot\sqrt{1-x^2}-n\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(\arcsin x)^{n-1}$$

$$=x(\arcsin x)^n+n\cdot(\arcsin x)^{n-1}\cdot\sqrt{1-x^2}-n(n-1)\int(\arcsin x)^{n-2}\mathrm{d}x .$$

因此当 $n\geqslant 2$ 时，递推公式为

$$I_n=x(\arcsin x)^n+n\cdot(\arcsin x)^{n-1}\cdot\sqrt{1-x^2}-n(n-1)I_{n-2} .$$

例 6.2.19 试建立 $I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x$ 的递推公式，其中 n 为自然数.

解 当 $n=0$ 时， $I_0=\int \mathrm{d}x=x+C$ ；当 $n=1$ 时， $I_1=\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$ ；当 $n\geqslant 2$ 时，

$$I_n=-\int\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\cos^2 x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$
$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

所以

$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

6.2.6 题型六、分段函数问题

例 6.2.20 求不定积分 $\int\max\{2,|x|\}\mathrm{d}x$.

解 由于

$$\max\{2,|x|\}=\begin{cases}-x & x<-2\\ 2 & -2\leqslant x<2\\ x & x\geqslant 2\end{cases},$$

当 $x<-2$ 时，$\int(-x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2+C_1$；当 $-2\leqslant x<2$ 时，$\int 2\mathrm{d}x=2x+C_2$；当 $x\geqslant 2$ 时，$\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C_3$. 由于 $\int\max\{2,|x|\}\mathrm{d}x$ 在 $x=-2$，$x=2$ 处连续，因此有

$$\lim_{x\to-2^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+C_1\right)=\lim_{x\to-2^+}(2x+C_2),\quad \lim_{x\to 2^-}(2x+C_2)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2}x^2+C_3\right).$$

解得 $C_2=2+C_1$，$C_3=4+C_1$. 从而

$$\int\max\{2,|x|\}\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+C & x<-2\\ 2x+2+C & -2\leqslant x<2\\ \frac{1}{2}x^2+4+C & x\geqslant 2\end{cases}.$$

例 6.2.21 设 $f(x)=\lim_{n\to\infty}(|x+2|^n+|x|^n)^{\frac{1}{n}}$，求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 当 $x\leqslant-1$ 时，$f(x)=|x|=-x$，当 $x>-1$ 时，$f(x)=|x+2|=x+2$，因此

$$f(x)=\begin{cases}-x & x\leqslant-1\\ x+2 & x>-1\end{cases},$$

显然函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+C_1 & x\leqslant-1\\ \frac{1}{2}x^2+2x+C_2 & x>-1\end{cases}.$$

由原函数的连续性可知

$$\lim_{x\to-1^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+C_1\right)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+C_2\right),$$

故 $C_1=C_2-1$，取 $C_2=C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2-1+C & x\leqslant -1\\ \dfrac{1}{2}x^2+2x+C & x>-1\end{cases}.$$

6.2.7　题型七、隐函数的积分

例 6.2.22　【1995 年北京市竞赛题】设 y 是由方程 $y^3(x+y)=x^3$ 所确定的隐函数，求 $\int\dfrac{1}{y^3}\mathrm{d}x$.

解　设 $y=tx$，则方程化为 $(tx)^3(x+tx)=x^3$，从而有

$$x=\frac{1}{t^3(1+t)},\quad y=\frac{1}{t^2(1+t)},$$

因此

$$\mathrm{d}x=-\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}\mathrm{d}t,\quad \frac{1}{y^3}=t^6(1+t)^3,$$

故

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{y^3}\mathrm{d}x&=-\int\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}\cdot t^6(1+t)^3\mathrm{d}t=-\int\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}\cdot t^6(1+t)^2\mathrm{d}t\\&=-\int(4t^4+7t^3+3t^2)\mathrm{d}t=-\frac{4}{5}t^5-\frac{7}{4}t^4-t^3+C\\&=-\frac{4y^5}{5x^5}t^5-\frac{7y^4}{4x^4}-\frac{y^3}{x^3}+C.\end{aligned}$$

注　隐函数求不定积分，常用的方法是将其化为参数方程，然后再进行求解.

6.3　深 化 训 练

6.3.1　填空题

（1）若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\sin x}{x}+C$，则 $\int xf(1-3x^2)\mathrm{d}x=$________.

（2）$\int\dfrac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x=$________.

（3）$\int\dfrac{\sin x}{3+\sin^2 x}\mathrm{d}x=$________.

（4）$\int\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x=$________.

（5）【2014 年考研题】设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________.

6.3.2　单项选择题

（1）设 $\int f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+C$，则 $f(x)=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{x}$；（B）$\dfrac{1}{x^2}$；（C）$-\dfrac{1}{x}$；（D）$-\dfrac{1}{x^2}$.

（2）若 $f(x)=2^x+x^2$，则 $\int f'(2x)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{2}(2^x+x^2)+C$；（B）$2^{2x}+4x^2+C$；

（C）$2^{2x-1}+2x^2+C$；（D）$2^{2x-1}+x^2+C$.

（3）已知 $f'(\cos x)=\sin x$，则 $f(\cos x)=$（　　）.

（A）$-\cos x+C$；（B）$\cos x+C$；

（C）$\dfrac{1}{2}\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}x+C$；（D）$\dfrac{1}{2}\sin x\cos x+\dfrac{1}{2}x+C$.

6.3.3　求解下列有理函数的积分：

（1）$\int\dfrac{x^3}{4+x^2}\mathrm{d}x$；（2）$\int\dfrac{1}{x(x^{10}+1)^3}\mathrm{d}x$；

（3）$\int\dfrac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x$；（4）$\int\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；

（5）$\int\dfrac{a^4+x^4}{a^6+x^6}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

6.3.4　求解下列无理函数的积分：

（1）$\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$；（2）$\int\dfrac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+5}}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

（3）$\int\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}}\mathrm{d}x\quad(a>0)$；（4）$\int x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$.

（5）$\int\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$（$a>0$）；（6）$\int\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x-a}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+a}}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

6.3.5　求解下列三角有理函数的积分：

（1）$\int\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；（2）$\int\dfrac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int\dfrac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$；（4）$\int\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；

（5）$\int\sin^5 x\cos^8 x\,\mathrm{d}x$；（6）$\int\sin^2 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$；

（7）$\int\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}\mathrm{d}x$（$|a|\neq|b|$）；

6.3.6　求解下列不定积分：

（1）$\int\dfrac{1-\ln x}{(x+\ln x)^2}\mathrm{d}x$；（2）【2001 年考研题】$\int\dfrac{\arctan(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$；（4）$\int\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x$，其中 $0<a<b$；

（5）$\int\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$.

6.3.7 【2002 年考研题】设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x$.

6.3.8 已知 $\int \dfrac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = x^2+\ln^2 x + C$，试求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

6.3.9 试建立 $I_n=\int \cos^n x\mathrm{d}x$ 的递推公式，其中 $n\geqslant 2$ 为自然数.

****6.3.10** 求解不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\dfrac{1}{x+c\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{a}}}$，这里 $c>0$， $0<a<1$.

6.4 深化训练详解

6.3.1 （1）$-\dfrac{\sin(1-3x^2)}{6(1-3x^2)}+C$；（2）$-\dfrac{1}{8(x^8+1)}+\dfrac{1}{16(x^8+1)^2}+C$；

（3）$\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}+C$；（4）$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+C$；

（5）1；**提示** 由题意

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x = x^2-2x+C,\quad x\in[0,2],$$

又因为 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(0)=0$，从而 $C=0$，即 $f(x)=x^2-2x$. 又因为 $f(x)$ 是周期为 4，因此

$$f(7)=f(-1+8)=f(-1)=-f(1)=-(1-2)=1 .$$

6.3.2 （1）D ；提示 $f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

（2）C；**提示** $\int f'(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int f'(2x)\mathrm{d}(2x)=\dfrac{1}{2}f(2x)+C$.

（3）C；**提示** 由于

$$[f(\cos x)]'=f'(\cos x)\cdot(-\sin x)=-\sin^2 x=-\frac{1-\cos 2x}{2},$$

因此

$$f(\cos x)=-\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{2}x+C .$$

6.3.3 （1）原式 $=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2}{4+x^2}\mathrm{d}(x^2)\xlongequal{u=x^2}\dfrac{1}{2}\int\dfrac{u}{4+u}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{4+u-4}{4+u}\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{2}u-2\ln|4+u|+C=\frac{x^2}{2}-2\ln(4+x^2)+C .$$

（2）原式 $=\int\dfrac{x^9}{x^{10}(x^{10}+1)^3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{10}\int\dfrac{1}{x^{10}(x^{10}+1)^3}\mathrm{d}(x^{10})\xlongequal{u=x^{10}}\dfrac{1}{10}\int\dfrac{1}{u(u+1)^3}\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{10}\int\frac{1+u-u}{u(u+1)^3}\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{u(u+1)^2}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1+u-u}{u(u+1)^2}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{u(u+1)}-\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\left[\ln\frac{x^{10}}{1+x^{10}}+\frac{1}{1+x^{10}}+\frac{1}{2(1+x^{10})^2}\right]+C.$$

（3）$\dfrac{1}{50}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\dfrac{1}{5(x-1)}-\dfrac{7}{25}\arctan(x+1)+C$.

（4）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$；

（5）原式$=\displaystyle\int\frac{a^4+x^4}{a^6+x^6}\mathrm{d}x=\int\frac{(a^4-a^2x^2+x^4)+a^2x^2}{(a^2+x^2)(a^4-a^2x^2+x^4)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x+a^2\int\frac{x^2}{a^6+x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{a^2}{3}\int\frac{1}{a^6+x^6}\mathrm{d}(x^3)$$

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{1}{3a}\arctan\frac{x^3}{a^3}+C.$$

6.3.4 （1）令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，因此

$$原式=\int\frac{2t^2}{\sqrt{2-t^3}}\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{2-t^3}}\mathrm{d}(2-t^3)=-\frac{4}{3}\sqrt{2-t^3}+C=-\frac{4}{3}\sqrt{2-x\sqrt{x}}+C.$$

（2）因为

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{x^2+1}+5)],$$

故

$$原式=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+5}\,\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{x^2+1}+5)]=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})+5]^{\frac{3}{2}}+C.$$

（3）原式$=\displaystyle\int\frac{1}{\mathrm{e}^x\sqrt{1-a^2\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-a^2\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}(a\mathrm{e}^{-x})=-\frac{1}{a}\arcsin(a\mathrm{e}^{-x})+C$.

（4）令 $x=\tan t$， $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2+1}=\sec t$， $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，所以

$$原式=\int\tan^2 t\cdot\sec t\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\sec^5 t\mathrm{d}t-\int\sec^3 t\mathrm{d}t.$$

而

$$\int\sec^5 t\mathrm{d}t=\int\sec^3 t\,\mathrm{d}(\tan t)=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int\tan t\cdot\sec^2 t\cdot\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int[\sec^2 t-1]\cdot\sec^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t+3\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t,$$

所以 $\displaystyle\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\tan t\cdot\sec^3 t+\frac{3}{4}\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t$，而

$$\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}(\tan t) = \sec t \cdot \tan t - \int \tan^2 t \cdot \sec t\,\mathrm{d}t$$
$$= \sec t \cdot \tan t - \int \sec^3 t\,\mathrm{d}t + \int \sec t\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sec t \cdot \tan t + \frac{1}{2}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + C,$$

从而

$$\text{原积分} = \frac{1}{4}\tan t \cdot \sec^3 t - \frac{1}{8}\sec t \cdot \tan t - \frac{1}{8}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + C$$
$$= \frac{1}{4}x \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} \cdot x \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8}\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

（5）**解法 1**　原式 $= \int \dfrac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = a\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x + \int \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= a \cdot \arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}(a^2-x^2)$$
$$= a \cdot \arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

解法 2　令 $t = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$，解得 $x = \dfrac{a(t^2-1)}{t^2+1}$，$\mathrm{d}x = \dfrac{4at}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，因此

$$\text{原式} = \int \frac{4at^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = 4a\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - 4a\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$
$$= 2a \cdot \arctan t - 2a\frac{t}{1+t^2} + C$$
$$= 2a \cdot \arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

（6）原式 $= \int \dfrac{\mathrm{e}^x - a}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}}\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}}\mathrm{d}x - a\int \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) - a\int \frac{1}{\mathrm{e}^x\sqrt{1-a^2\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x$$
$$= \ln\left|\mathrm{e}^x + \sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}\right| + \int \frac{1}{\sqrt{1-a^2\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}(a\mathrm{e}^{-x})$$
$$= \ln\left|\mathrm{e}^x + \sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}\right| + \arcsin(a\mathrm{e}^{-x}) + C;$$

6.3.5　（1）原式 $= \int \dfrac{x+\sin x}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \dfrac{x}{2} \cdot \sec^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x + \int \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$= \int x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x = x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$
$$= x\tan\frac{x}{2} + C.$$

（2）原式 $=\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int \sec^2 x\mathrm{d}x+\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)$

$=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$.

（3）原式 $=\int x\cot x\cdot\csc^2 x\,\mathrm{d}x=-\int x\cot x\,\mathrm{d}(\cot x)=-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}(\cot^2 x)$

$=-\frac{1}{2}x\cot^2 x+\frac{1}{2}\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x\quad=-\frac{1}{2}x\cot^2 x+\frac{1}{2}\int(\csc^2 x-1)\,\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}x\cot^2 x-\frac{1}{2}\cot x-\frac{1}{2}x+C$.

（4）$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$.

提示　$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$.

（5）$-\frac{1}{9}\cos^9 x+\frac{2}{11}\cos^{11} x-\frac{1}{13}\cos^{13} x+C$.　**提示**　原式 $=\int \sin^4 x\cos^8 x\,\mathrm{d}(\cos x)$.

（6）$\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin(2x)-\frac{1}{64}\sin(4x)-\frac{1}{192}\sin(6x)+C$.　**提示**　利用倍角公式降低三角函数的幂次.

（7）因为

$$(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)'=-2a^2\cos x\sin x+2b^2\sin x\cos x$$
$$=2\sin x\cos x(b^2-a^2)=\sin 2x(b^2-a^2),$$

因此

$$原式=\frac{1}{b^2-a^2}\int \frac{\mathrm{d}(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}=\frac{2}{b^2-a^2}\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}+C .$$

6.3.6　（1）因为 $\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$，故

$$原式=\int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=-\frac{1}{1+\frac{\ln x}{x}}+C .$$

（2）原式 $=-\frac{1}{2}\int \arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan(\mathrm{e}^x)+\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}(\arctan \mathrm{e}^x)$

$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan(\mathrm{e}^x)+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$，

而

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int \frac{1}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t-\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{t}-\arctan t+C=-\mathrm{e}^{-x}-\arctan\mathrm{e}^{x}+C,$$

所以原积分$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan(\mathrm{e}^{x})-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\arctan\mathrm{e}^{x}+C$.

（3）首先由配方得

$$(x-a)(b-x)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

令$t=x-\frac{a+b}{2}$，则$x=t+\frac{a+b}{2}$，记$R=\frac{b-a}{2}$，从而

$$\text{原式}=\int\sqrt{R^2-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}R^2\arcsin\frac{t}{R}+\frac{1}{2}t\sqrt{R^2-t^2}+C$$

$$=\frac{1}{8}(b-a)^2\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

注　本题也可以作变量替换$x-a=(b-a)\sin^2 t$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

（4）$2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$；**提示**　**解法1**　配方得

$$(x-a)(b-x)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

令$t=x-\frac{a+b}{2}$，则$x=t+\frac{a+b}{2}$，记$R=\frac{b-a}{2}$，从而原式$=\int\frac{1}{\sqrt{R^2-t^2}}\mathrm{d}t$.

解法2　设$x-a=(b-a)\sin^2 t$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

（5）$\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}\right)+C$；**提示**

$$\text{原式}=\frac{1}{b^2-a^2}\int\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}\right)+C.$$

6.3.7　令$u=\sin^2 x$，则$f(u)=\frac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，从而$f(x)=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，因此

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x)$$

$$=-2\int\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{1-x}=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

6.3.8　$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+x^2+C_1x+C_2$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

6.3.9　$I_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

6.3.10 由题意，

$$f(x)=\frac{1}{x+ca^{-\frac{1}{a}}x^{\frac{1}{a}}}=\frac{x^{-1}}{1+ca^{-\frac{1}{a}}x^{\frac{1}{a}-1}},$$

令 $t=1+ca^{-\frac{1}{a}}x^{\frac{1}{a}-1}$，则

$$\ln\left(\frac{|t-1|}{c}a^{\frac{1}{a}}\right)=\left(\frac{1}{a}-1\right)\ln|x|,$$

即有

$$\frac{1}{a}\ln a+\ln|t-1|-\ln c=\frac{1-a}{a}\ln|x|,$$

等式两边同时取微分

$$\frac{1}{t-1}\mathrm{d}t-\ln c=\frac{1-a}{ax}\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{a}{1-a}\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{1-a}\left[\ln|t-1|-\ln|t|\right]+C\\&=\frac{a}{1-a}\left(\ln\left|ca^{-\frac{1}{a}}x^{\frac{1}{a}-1}\right|-\ln\left|1+ca^{-\frac{1}{a}}x^{\frac{1}{a}-1}\right|\right)+C.\end{aligned}$$

第 7 章　定　积　分

7.1　知 识 要 点

本章主要内容包括定积分的概念与性质、积分中值定理、变上限积分函数的定义与性质、牛顿-莱布尼茨公式、定积分的换元积分法与分部积分法、反常积分、定积分的几何应用和物理应用等.

7.1.1　定积分的概念

1．定积分的定义

$y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是通过分割、近似替代、求和、取极限四步得到的，其定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{ ,}$$

其中 ξ_i 为第 i 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的任意一点，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda=\max\{\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n\}$，注意在这里，区间 $[a,b]$ 的划分是任意的，ξ_i 的选取方式也是任意的.

2．定积分的几何意义

（1）若 $f(x)\geqslant 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴围成的曲边梯形的面积;

（2）若 $f(x)\leqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴围成的曲边梯形面积的负值;

（3）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴围成平面图形面积的代数和，即等于 x 轴上方的平面图形面积减去 x 轴下方的平面图形面积，如图 7.1 所示，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2+A_3$.

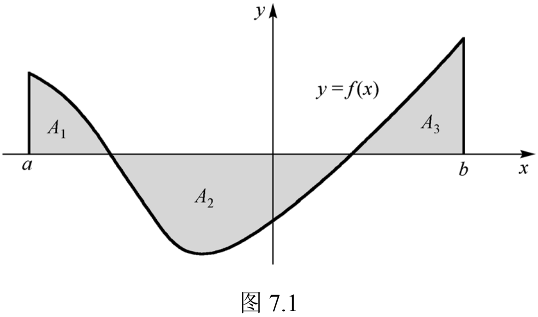

图 7.1

3．定积分的物理意义

$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ 表示做变速直线运动的物体以速度 $v=v(t)$ 在时间段 $[a,b]$ 内走过的路程.

4．关于定积分的几个注解

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则积分值 I 仅与被积函数 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 有关系，与积分变量的记法没关系，如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t .$$

（2）定积分存在的条件：若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，或 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积．无界函数一定不可积，或者说函数有界是函数可积必要条件.

（3）$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

7.1.2　定积分的基本性质

（1）**线性性质**　设 k 和 l 为常数，则 $\int_a^b [k\,f(x)\pm l\,g(x)]\mathrm{d}x$ 存在，且有

$$\int_a^b [k\,f(x)\pm l\,g(x)]\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm l\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

（2）**定积分对区间的可加性**　对于任意的实数 a、b 和 c，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

（3）**保号性**　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

（4）若对于 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

（5）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 不恒等于 0，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

（6）若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对于 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；若 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

（7）**估值定理**　若对于 $\forall x\in[a,b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a) .$$

7.1.3　积分中值定理

（1）**积分第一中值定理**　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a) .$$

这里 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**积分均值**或**平均值**.

（2）**推广的积分第一中值定理** 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上同号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

*（3）**积分第二中值定理** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，且 $g(x)\geqslant 0$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x ;$$

若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，且 $g(x)\geqslant 0$，则存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x .$$

7.1.4　变上限积分函数

若 $y=f(x)$ 连续，则变上限积分函数（也称为积分上限函数）$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) .$$

一般地，若 $f(t)$ 连续，$g(x)$ 和 $h(x)$ 可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[g(x)]\cdot g'(x) ;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t = f\,[h(x)]h'(x) - f\,[g(x)]g'(x) .$$

7.1.5　定积分的计算

1．牛顿-莱布尼茨公式

若 $y=f(x)$ 连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的任意一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) .$$

2．定积分的换元法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x=\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调，$\phi(\alpha)=a$，$\phi(\beta)=b$，且 $\phi'(t)$ 连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$.

3．定积分的分部积分法

设 $u=u(x),v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，则 $\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$.

7.1.6　反常积分（或广义积分）

（1）$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

（2）若对某个常数 c，$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x .$$

（3）若 a 为瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$；若 b 为瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$.

（4）若对某个 $c\in(a,b)$，且 c 为瑕点，$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x .$$

7.1.7　Γ 函数

对于 $\forall t>0$，Γ 函数的定义为：$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.　Γ 函数的性质主要包括：

$$\Gamma(1)=1\text{；}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\text{；}\ \Gamma(t+1)=t\Gamma(t)\text{；}\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\text{；}\ \Gamma(n+1)=n!\,.$$

7.1.8　定积分的应用

1．平面图形的面积

如图 7.2 所示，曲边梯形 $f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 的面积为

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x .$$

如图 7.3 所示，曲边梯形 $g_1(y)\leqslant x\leqslant g_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 面积为

$$A=\int_c^d [g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y .$$

如图 7.4 所示，曲边扇形 $0\leqslant r\leqslant r(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 的面积为 $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$.

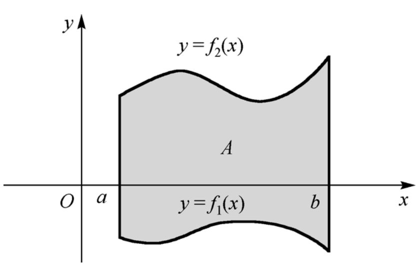

图 7.2

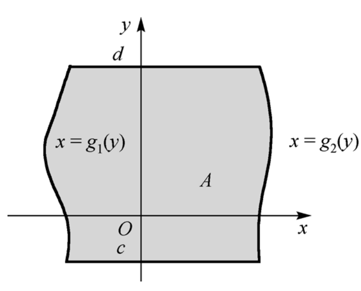

图 7.3

2．平行截面面积已知的立体的体积

如图 7.5 所示，设一立体位于过 $[a, b]$ 的端点且垂直于 x 轴的两个平面之间，$A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，则该立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x .$$

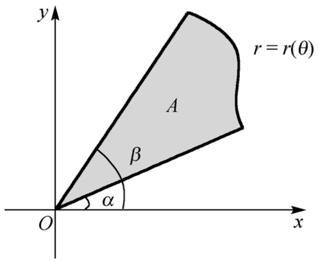

图 7.4

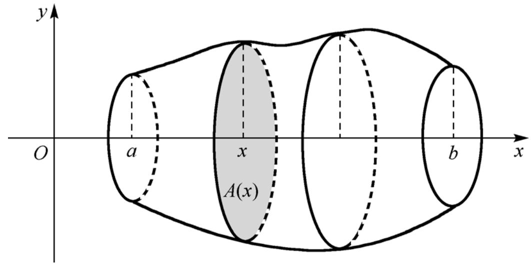

图 7.5

3．旋转体的体积

如图 7.6 所示，由平面图形$0\leqslant y\leqslant f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$绕$x$轴旋转形成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x .$$

如图 7.7 所示，由平面图形$0\leqslant x\leqslant g(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$绕$y$轴旋转形成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y .$$

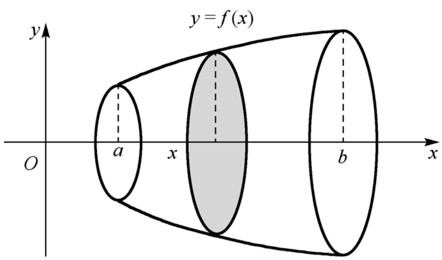

图 7.6

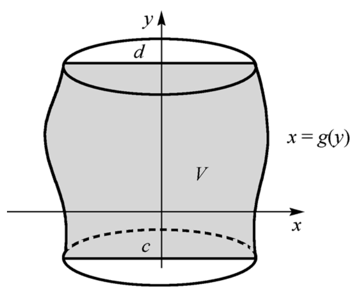

图 7.7

由平面图形$0\leqslant y\leqslant f(x)$，$0\leqslant a\leqslant x\leqslant b$绕$y$轴旋转形成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x .$$

由平面图形$0\leqslant x\leqslant g(x)$，$0\leqslant c\leqslant y\leqslant d$绕$x$轴旋转形成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_c^d yg(y)\mathrm{d}y .$$

*4．旋转曲面的面积

由曲线弧段$y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$绕x轴旋转形成的旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x ;$$

若曲线弧段由参数方程给出，$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$，则该曲线弧段绕$x$轴旋转形成的旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

*5. 平面曲线的弧长

若曲线弧由直角坐标给出，$y=f(x)$，$x\in[a,b]$，则弧长为 $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

若曲线弧由参数方程给出，$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$，则弧长为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$.

若曲线弧由极坐标给出，$\rho\leqslant\rho(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$，则弧长为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$.

7.1.9 几个重要的结论

（1）$\int_a^b(x-a)(b-x)\mathrm{d}x=\dfrac{(b-a)^3}{12}$.

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n\text{为偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为奇数}\end{cases}$.

（3）设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$；若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

（4）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，对于任意的实数 a，有

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\,.$$

（5）若 $f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x\,;$$

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x\,.$$

（6）**柯西（Cauchy）–施瓦兹（Schwarz）不等式** 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\,.$$

当 $f(x)=cg(x)$ 时，等号成立.

（7）闵可夫斯基（Minkowski）不等式

$$\sqrt{\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)^2\mathrm{d}x}\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}\,.$$

7.2　典型例题分析

7.2.1　题型一、定积分的求解

例 7.2.1 【2007 年北京市竞赛题】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\,dx =$ ________.

解　原式$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\,dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2-2\cos x-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$=-\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=-\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right)=4-\pi .$$

注　$x=0$ 为被积函数 $\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ 的一个可去间断点，积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ 还可以按照如下方法求解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 x-\cot x\csc x)\,dx=(-\cot x+\csc x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1-\cos x}{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=1-0=1 .$$

例 7.2.2 【2006 年北京市竞赛题】$\int_0^{2006\pi} x|\sin x|dx =$ ________.

解　令 $t=2006\pi-x$，则

$$\int_0^{2006\pi} x|\sin x|dx=-\int_{2006\pi}^{0}(2006\pi-t)\,|\sin t|\,dt=-\int_0^{2006\pi} t\,|\sin t|\,dt+2006\pi\int_0^{2006\pi}|\sin t|\,dt ,$$

从而有

$$\int_0^{2006\pi} x|\sin x|dx=\frac{2006\pi}{2}\int_0^{2006\pi}|\sin t|dt=\frac{2006\pi}{2}\times 2006\times 2=(2006)^2\pi .$$

注　本题的求解过程利用了第二类换元法及正弦函数的周期性，通过一个简单的变换，将被积函数中的 x 去掉了.

例 7.2.3　求解定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x|\arctan(e^x)dx$.

解　原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\arctan(e^x)dx-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin x\arctan(e^x)dx$，令 $t=-x$，则有

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin x\arctan(e^{x})dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin t\arctan(e^{-t})dt=-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin t\arctan(e^{-t})dt$$

$$=-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\arctan(e^{-x})dx,$$

因此

$$\text{原式}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\arctan(e^{x})dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\arctan(e^{-x})dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x[\arctan(e^{x})+\arctan(e^{-x})]dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

注 本题用到了第 4 章的结论：$\arctan(e^{x})+\arctan(e^{-x})=\frac{\pi}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

7.2.2 题型二、 变限积分问题

例 7.2.4 $\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{2x}\int_0^{\sin t}\sqrt{1+3u^4}\,du\,dt$ ________.

解 令 $f(x)=\int_0^{2x}\int_0^{\sin t}\sqrt{1+3u^4}\,du\,dt$，则 $f(x)=\int_0^{2x}\left(\int_0^{\sin t}\sqrt{1+3u^4}\,du\right)dt$，

根据复合函数求导法则，有

$$f'(x)=2\int_0^{\sin(2x)}\sqrt{1+3u^4}\,du,\quad f''(x)=4\cos(2x)\sqrt{1+3(\sin(2x))^4}.$$

例 7.2.5 【2001 年北京市竞赛题】 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=$________.

解 由于 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，因此有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2xf(x^2)}{2f(x)\int_0^x f(t)dt}=\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{x^2}{\int_0^x f(t)dt}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\int_0^x f(t)dt}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{f(x)}=2.$$

例 7.2.6 【2005 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非负连续，且

$$f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x,$$

求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的积分均值.

解　令 $x-t=u$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，令 $F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，则

$$F(x)F'(x)=\sin^4 x,$$

从而 $\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^{\pi}=\int_0^{\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\pi$，解得 $F(\pi)=\frac{\sqrt{3\pi}}{2}$，故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的积分均值为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

7.2.3　题型三、积分不等式问题

例 7.2.7　【2006 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $|f(x)|<1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明对于任意的 $a,b\in[0,1]$，都有 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}$ 成立.

证　当 $a=b$ 时，结论显然成立．当 $a\neq b$ 时，不妨假设 $a<b$，分类讨论.

（1）若 $b-a\leqslant\frac{1}{2}$，利用积分中值定理，$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)||b-a|\leqslant\frac{1}{2};$$

（2）若 $b-a>\frac{1}{2}$，由于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_b^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

根据积分中值定理可知，$\exists\xi\in[0,a]$ 和 $\exists\eta\in[b,1]$，使得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_b^1 f(x)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)|a+|f(\eta)|(1-b)$$

$$\leqslant 1-(b-a)<\frac{1}{2}.$$

综上，结论成立.

例 7.2.8　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

证　令 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，分类讨论.

当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时，根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,x)$，使得 $f(x)=f(0)+f'(\xi_1)x$，所以 $|f(x)|\leqslant Mx$.

当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi_2\in(x,1)$，使得 $f(x)=f(1)+f'(\xi_2)(x-1)$，所以 $|f(x)|\leqslant M(1-x)$．故

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}M .$$

注　本题还有更一般的结论，见本章习题 7.3.11.

例 7.2.9　【2005 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续单调增加，证明不等式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x .$$

证法 1　利用积分的第一类积分换元法：

$$2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2) \xlongequal{t=x^2} \int_0^1 f(\sqrt{t})\mathrm{d}t = \int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x ,$$

又因为当 $x\in[0,1]$ 时，$\sqrt{x} \geqslant x$，因此

$$f(\sqrt{x}) \geqslant f(x) ,\quad \int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x ,$$

故不等式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$ 成立.

证法 2　利用二重积分：

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，因此当 $x, y\in[0,1]$ 时，有

$$(x-y)[f(x)-f(y)] \geqslant 0 .$$

记 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x,y\leqslant 1\}$，则由二重积分的性质，

$$\iint_D (x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0 ,$$

而

$$\begin{aligned}\iint_D (x-y)(f(x)-f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D \left[xf(x)-yf(x)-xf(y)+yf(y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint_D \left[xf(x)-yf(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x ,\end{aligned}$$

所以不等式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$ 成立.

例 7.2.10　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max_{x\in[a,b]}[f'(x)]^2 .$$

证　记 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}[f'(x)]^2$，由于 $f(a)=f(b)=0$，因此

$$f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x = -\int_x^b f'(x)\mathrm{d}x .$$

当 $x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 时，利用柯西-施瓦兹不等式有

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^x 1^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(x-a)^2 .$$

当 $x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 时，类似地有

$$f^2(x)=\left(\int_x^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_x^b 1^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_x^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(x-b)^2 ,$$

因此

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2\mathrm{d}x+M\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-b)^2\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{12}M .$$

例 7.2.11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right| .$$

证法 1 利用泰勒展开进行证明．令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$，将 $f(a)$ 在 x 处展开，至少存在一点 $\xi\in(a,x)$，使得

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2,$$

等式两边同时取定积分，得

$$0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)(a-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(a-x)^2\,\mathrm{d}x .$$

因为

$$\int_a^b f'(x)(a-x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a-x)\mathrm{d}f(x)=(a-x)f(x)\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x ,$$

所以 $2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(a-x)^2\,\mathrm{d}x$，故

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{4}\int_a^b(a-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{12}M .$$

证法 2 利用分部积分法证明．记 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a)=(x-a)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b(x-a)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_a^b(x-a)f'(x)\mathrm{d}x .$$

类似方法可以证明 $I=-\int_a^b(x-b)f'(x)\mathrm{d}x$，因此

$$2I = -\int_a^b [(x-a)+(x-b)]f'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)\mathrm{d}[(x-a)(x-b)]$$
$$= \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x\,,$$

所以

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12}M\ .$$

例 7.2.12　【2014 年考研题】设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调递增，$0 \leqslant g(x) \leqslant 1$，证明：

（1）　$0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a,\ x\in[a,b]$；

（2）　$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

证　（1）当 $x\in[a,b]$ 时，函数 $g(x)$ 在 $[a,x]$ 上使用积分中值定理，则至少存在一点 $\xi\in[a,x]$，使得

$$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t = g(\xi)(x-a)\,,$$

又因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，因此 $0\leqslant g(\xi)(x-a)\leqslant x-a$，结论（1）得证.

（2）构造辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t - \int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(u)\mathrm{d}u\ .$$

当 $x\in(a,b)$ 时，

$$F'(x) = f(x)g(x) - f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)g(x) \geqslant f(x)g(x) - f(a+x-a)g(x) = 0\,,$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，因此 $F(b)\geqslant F(a)=0$，结论(2)得证.

例 7.2.13　【2013 年全国竞赛预赛题】设 $|f(x)|\leqslant \pi$，$f'(x)\geqslant m>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$，证明 $\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}$.

证　因为当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增，从而存在反函数. 令 $t=f(x)$，其反函数记为 $x=\phi(t)$，又记 $\alpha=f(a)$，$\beta=f(b)$，由于 $|f(x)|\leqslant\pi$，因此 $-\pi\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$，利用第二类换元积分法，有

$$\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x \underline{\underline{\ x=\phi(y)\ }} \int_\alpha^\beta \sin t\cdot\phi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

由于当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f'(x)\geqslant m>0$，因此 $0<\phi'(t)=\frac{1}{f'(x)}\leqslant\frac{1}{m}$，所以

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_\alpha^\beta \sin t\cdot\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \sin t\cdot\phi'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{m}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{m}\ .$$

注　在求解不定积分时，一个非常重要的思想是复合函数的积分需要利用第二类换元积分法求解，本题即属于该类型.

例 7.2.14 【2013 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=0$，试证明：

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x .$$

证 注意到 $f(a)=0$，则 $f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x$，记 $g(x)=\int_a^x |f'(x)|\mathrm{d}x$，则有

$$|f(x)|=\left|\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^x |f'(x)|\mathrm{d}x = g(x),$$

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)g'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_a^b$$

$$=\frac{1}{2}g^2(b)=\frac{1}{2}\left[\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x\right]^2=\frac{1}{2}\left[\int_a^b 1\cdot|f'(x)|\mathrm{d}x\right]^2,$$

由柯西−施瓦兹不等式可知

$$\left[\int_a^b 1\cdot|f'(x)|\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b 1^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x=(b-a)\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

因此有

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x .$$

注 本题的主要思路是在于通过放缩方法将积分 $\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x$ 的求解转化为积分 $\int_a^b g(x)g'(x)\mathrm{d}x$ 的求解.

7.2.4 题型四、积分等式问题

例 7.2.15 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0,$ 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$ 成立.

证法 1 利用泰勒展开式，存在 $\eta\in(-a,a)$，使得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\eta)x^2$ 成立，于是

$$\frac{1}{2}f''(\eta)x^2=f(x)-f(0)-f'(0)x,$$

两端积分，得

$$\int_{-a}^a \frac{1}{2}f''(\eta)x^2\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x .$$

因为 $f''(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 存在最大值 M 和最小值 m，使得

$$\frac{ma^2}{3}=\int_{-a}^a \frac{m}{2}x^2\mathrm{d}x \leqslant \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-a}^a \frac{M}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{Ma^2}{3},$$

即

$$m \leqslant \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M \text{ .}$$

利用连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi \in [-a,a]$，使得 $f''(\xi) = \dfrac{3}{a^3}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$，即 $a^3 f''(\xi) = 3\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ 成立.

证法 2　令 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(-a)$，利用泰勒展开式，则至少存在一点 $\eta \in (-a, a)$，有

$$F(x) = F(0) + f(0)x + \frac{1}{2}f'(0)x^2 + \frac{1}{3!}f''(\eta)x^3 \text{ .}$$

将 $x = a$ 和 $x = b$ 分别代入上式，有

$$F(a) = F(0) + f(0)a + \frac{1}{2}f'(0)a^2 + \frac{1}{3!}f''(\xi_1)a^3 \text{，其中 } \xi_1 \in (0, a) \text{，}$$

$$F(-a) = F(0) - f(0)a + \frac{1}{2}f'(0)a^2 - \frac{1}{3!}f''(\xi_2)a^3 \text{，其中 } \xi_2 \in (-a, 0) \text{，}$$

因此有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{6}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)] \text{ .}$$

由达布定理可知，至少存在 $\xi \in [\xi_2, \xi_1] \subset (-a,a)$，使得 $f''(\xi) = \dfrac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$，从而结论得证.

注　从证法 2 可以看到，可以在开区间 $(-a,a)$ 内找到一点 ξ，使得结论正确．本题还可以推广为更一般的情况，见例 7.2.16.

例 7.2.16　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，证明至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3 \text{ .}$$

注　（1）本题的证明过程完全可以参照上题的求证过程. 方法 1 是将函数 $f(x)$ 在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 处泰勒展开，然后利用连续函数的介值定理即可；方法 2 是构造辅助函数 $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$，然后将 $F(a)$ 和 $F(b)$ 分别在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 处泰勒展开，然后利用达布定理即可．具体证明过程请读者自己完成.

（2）在本题中，如果将积分区间改为 $[-a,a]$，且假定 $f\left(\dfrac{-a+a}{2}\right) = f(0) = 0$，则本题的结论将与例 7.2.15 相同，因此例 7.2.15 可以视为本题的一个特例.

（3）同例 7.2.15 类似，也可以在开区间 $(-a,a)$ 内找到一点 ξ，使得结论正确.

7.2.5　题型五、反常积分问题

例 7.2.17　求解反常积分 $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解　原式 $=-\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x=-\int_0^1 \ln(1-x)(1+x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x-\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ ，

结合定积分的分部积分法，有

$$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$=\ln 2-(1-\ln 2)=2\ln 2-1 .$$

令 $t=1-x$ ，则瑕积分

$$\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0 \ln t\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln t\,\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(t\ln t\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 \mathrm{d}t\right)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon-(1-\varepsilon))=-1 ,$$

所以

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=-2\ln 2+1+1=2(1-\ln 2) .$$

***例 7.2.18**　【2010 年全国竞赛预赛题】设 $S>0$ ，求 $I_n=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Sx}x^n\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$.

解　因为 $S>0$ ，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-Sx}x^n=0$ ，故

$$I_n=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Sx}x^n\mathrm{d}x=-\frac{1}{S}\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{-Sx}=-\frac{1}{S}x^n\mathrm{e}^{-Sx}\Big|_0^{+\infty}+\frac{n}{S}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Sx}x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{S}I_{n-1} ,$$

根据上述递推公式，有

$$I_n=\frac{n!}{S^n}I_0=\frac{n!}{S^n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Sx}\mathrm{d}x=\frac{n!}{S^{n+1}} .$$

例 7.2.19　【2012 年全国竞赛预赛试题】计算 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$.

解法 1　由于 $0\leqslant \mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\leqslant \mathrm{e}^{-2x}$ ，而无穷限的反常积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ 收敛，因此反常积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$ 收敛．故有

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x .$$

而

$$\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x ,$$

由分部积分法可知

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2k\pi}(1+\mathrm{e}^{2\pi}),$$

因此

$$\int_0^{n\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2k\pi}(1+\mathrm{e}^{2\pi})=\frac{1}{5}(1+\mathrm{e}^{2\pi})\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}(1-\mathrm{e}^{-2n\pi})}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\cdot\frac{(1+\mathrm{e}^{2\pi})}{\mathrm{e}^{2\pi}-1}.$$

注　本题也可以不判断反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$ 的收敛性，直接利用夹逼定理进行求解．结合分部积分法，有

$$\int_0^{n\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2k\pi}(1+\mathrm{e}^{2\pi})=\frac{1}{5}(1+\mathrm{e}^{2\pi})\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}(1-\mathrm{e}^{-2n\pi})}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}.$$

当 $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+1$ 时，

$$\int_0^{n\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{x}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x,$$

由夹逼定理可知

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\cdot\frac{(1+\mathrm{e}^{2\pi})}{\mathrm{e}^{2\pi}-1}.$$

例 7.2.20　【2013 年全国竞赛预赛试题】证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的．

证　记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$，只要证明正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不绝对收敛．结合函数 $|\sin x|$ 的周期性，有

$$a_n\geqslant\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi(n+1)}\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi(n+1)},$$

而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，正项级数的比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，从而结论得证．

7.2.6　题型六、积分的应用问题

例 7.2.21　【2013 年考研题】设 D 是由 $y=x^{\frac{1}{3}},x=a(a>0)$ 及 x 轴围城的平面图形，V_x 和 V_y 分别是 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周得到的旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值．

解　如图 7.8 所示，根据旋转体体积的计算公式，有

$$V_x=\int_0^a\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}},$$

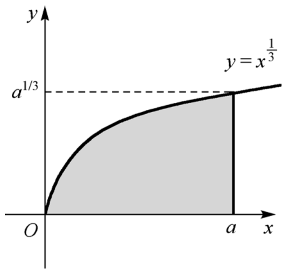

图 7.8

$$V_y=\pi\cdot a^2 a^{\frac{1}{3}}-\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\pi(y^3)^2\mathrm{d}y\,,$$

解得 $V_y=\pi\cdot a^2a^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{7}\pi\cdot a^{\frac{7}{3}}$，由题设 $V_y=10V_x$，可解得 $a=7\sqrt{7}$.

例 7.2.22　【2013 年全国竞赛预赛题】过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\,(x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$，求点 A 的坐标.

解　如图 7.9 所示，设切点 A 的坐标为 $(x_0,\sqrt[3]{x_0})$，曲线过 A 点的切线方程为

$$y-\sqrt[3]{x_0}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_0^2}}(x-x_0)\,.$$

令 $y=0$，解得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x=-2x_0$，所以平面图形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_0}\cdot 3x_0-\int_0^{x_0}\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}(x_0)^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\,,$$

因此 $x_0=1$，所以 A 的坐标为 $(1,1)$.

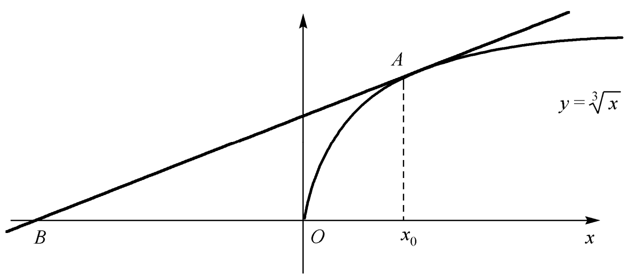

图 7.9

***例 7.2.23**　已知摆线的方程为 $\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$，$a>0$，如图 7.10 所示，试求

（1）求摆线的一拱（$\theta\in[0,2\pi]$）与 x 轴围成的图形的面积 A；

（2）求摆线的一拱（$\theta\in[0,2\pi]$）的弧长 s；

（3）求摆线的一拱（$\theta\in[0,2\pi]$）绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的体积 V；

（4）求摆线的一拱（$\theta\in[0,2\pi]$）绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的表面积 S .

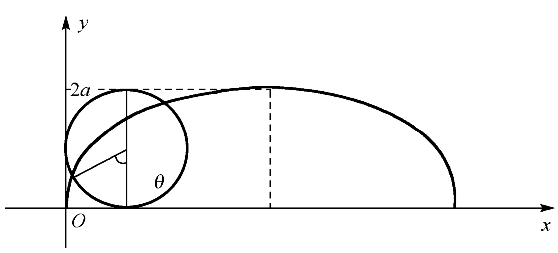

图 7.10

解　（1）$A=\int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=3\pi a^2.$$

（2）根据参数方程的弧长公式，有

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}t$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\mathrm{d}t=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}t=8a.$$

（3）根据参数方程的旋转体体积公式，有

$$V=\pi\int_0^{2\pi} y^2(\theta)x'(\theta)\mathrm{d}\theta=\pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left[1-3\cos\theta+\frac{3}{2}(1+\cos(2\theta))-\cos^3\theta\right]\mathrm{d}\theta,$$

因为

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}(\sin\theta)=\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\left[1-3\cos\theta+\frac{3}{2}(1+\cos(2\theta))\right]\mathrm{d}\theta=5\pi,$$

所以 $V=5\pi^2a^3$.

（4）根据参数方程的旋转曲面的面积公式，有

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}|y(\theta)|\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3t\,\mathrm{d}t=-16\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2t)\,\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

***例 7.2.24**　【2011 年全国竞赛预赛题】　在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 ρ，在点 $A(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 m 的质点，求射线对该质点的引力.

分析：质量分别为 m_1 和 m_2，相距为 r 的两个质点之间的引力大小为 $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$，其中 G 为引力系数，引力的方向为沿着两质点的连线方向．本题中，是计算一条具有均匀密度的射

线与一质点间的引力，因此需要用到无穷限的反常积分.

解　在 x 轴上任取积分区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，这里 $x \geqslant a$，该线段可以近似地看成质点，其质量为 $\rho\mathrm{d}x$，到质点 A 的距离为 $\sqrt{x^2+h^2}$，该线段与质点间的引力 ΔF 的大小为

$$\Delta F \approx G\frac{m\rho\mathrm{d}x}{x^2+h^2}$$

其中 G 为引力系数.

从而 $\mathrm{d}F = G\dfrac{m\rho\mathrm{d}x}{x^2+h^2}$，该引力在水平方向的分力 F_x 的微元为

$$\mathrm{d}F_x = -G\frac{m\rho x\mathrm{d}x}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{（方向沿着 } x \text{ 轴的负向）},$$

从而

$$F_x = -Gm\rho\int_a^{+\infty}\frac{x}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = -\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{1}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}(x^2+h^2) = -\frac{Gm\rho}{\sqrt{x^2+h^2}},$$

$\mathrm{d}F$ 在铅垂方向的分量 $\mathrm{d}F_y$ 为

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{m\rho h\mathrm{d}x}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{（方向沿着 } y \text{ 轴的正向）},$$

所以 $F_y = Gm\rho h\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$，令 $x = h\tan t$，$t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{d}x = h\sec^2 t\mathrm{d}t$，因此

$$F_y = Gm\rho h\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{h\sec^2 t}{h^3\sec^3 t}\mathrm{d}t = \frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right).$$

综上所求引力向量 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$.

***例 7.2.25**　有一个等腰三角形金属薄片垂直立沉没某液体中，底边与液面齐平，液体的密度为 ρ，三角形薄片的底边长度为 $\dfrac{1}{5}$ 米，高为 1 米，试求它的一侧所受到的压力.

解　如图 7.11 所示，以等腰三角形的高线为 x 轴，且朝下的方向为 x 轴的正向，以等腰三角形的底边为 y 轴建立直角坐标系．取 x 为积分变量，设 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 为 $[0,1]$ 上的任意小区间，

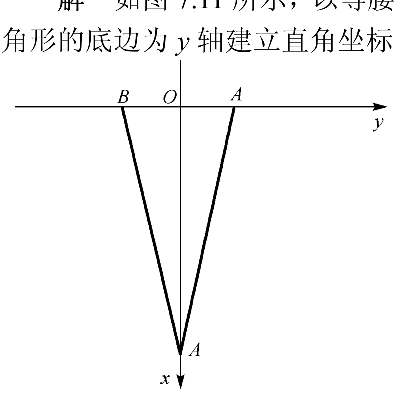

图 7.11

则在液体深度为 x 处的压强为 $p = \rho g x$，其中 g 为重力加速度．直线 AB 的方程为 $y = \dfrac{1}{10}(1-x)$，金属薄片在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 小窄条上面积近似地等于 $2y\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}(1-x)\mathrm{d}x$，因此小窄条的一侧所受的液体压力元素为

$$\mathrm{d}P = \rho g x\frac{1}{5}(1-x)\mathrm{d}x,$$

所以金属薄片的一侧所受到的压力为

$$P=\int_0^1 \rho g x \frac{1}{5}(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}\rho g .$$

***例 7.2.26** 【2003 年考研题】某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层．汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功．设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 k，$k>0$），汽锤第一次击打将桩打进地下 a (m)，根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次击打时所做的功之比为常数 r（$0<r<1$）．问

（1）汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

（2）若击打次数不限，汽锤至多能将桩打入地下多深？（注：m 表示长度单位米）

解 （1）设 x_n 为 n 次击打桩时将桩打进地下的深度，汽锤第 n 次击打桩所做的功为 W_n，则

$$W_1=\int_0^{x_1} kx\mathrm{d}x=\int_0^a kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}ka^2,$$

$$W_2=\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x=\int_a^{x_2} kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k(x_2^2-a^2),$$

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3} kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k(x_3^2-x_2^2),$$

由于 $W_3=rW_2$，$W_2=rW_1$，因此有

$$\frac{1}{2}k(x_3^2-x_2^2)=\frac{r}{2}k(x_2^2-a^2),\quad \frac{1}{2}k(x_2^2-a^2)=\frac{r}{2}ka^2,$$

解得 $x_2=a\sqrt{1+r}$，$x_3=a\sqrt{1+r+r^2}$，即汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下 $a\sqrt{1+r+r^2}$ 米．

（2）利用数学归纳法，容易证明 $x_n=a\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}$，从而 $x_n=a\sqrt{\dfrac{1-r^n}{1-r}}$，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}=\frac{1}{\sqrt{1-r}},$$

即若击打次数不限，汽锤至多能将桩打入地下 $\dfrac{1}{\sqrt{1-r}}$ 米．

7.2.7 题型七、定积分的其他问题

例 7.2.27 【2008 年北京市竞赛题】讨论是否存在 $[0,2]$ 上满足下列条件的函数，并阐述理由．$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有连续导数，$f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\leqslant 1$，$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 1$．

解 不存在这样的函数．原因如下：

当 $x\in(0,2)$ 时，函数 $f(x)$ 分别在 $[0,x]$ 和 $[x,2]$ 上利用拉格朗日中值定理，则至少存在一点 $\xi_1\in(0,x)$ 和 $\xi_2\in(x,2)$，使得

$$f(x)=1+f'(\xi_1)x,\quad f(x)=1+f'(\xi_2)(2-x),$$

因为 $|f'(x)|\leqslant 1$，因此有

$$f(x)\geqslant 1-x,\quad f(x)\geqslant x-1 .$$

上面的不等式等号不能同时成立．否则，若等号同时成立，则当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=1-x$，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=x-1$，此时 $f(x)$ 不满足连续可导的条件．于是

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x>\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1,$$

故不存在满足所给条件的函数.

例 7.2.28　【2011 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数， n 为正整数，证明

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad (n\to\infty).$$

分析　为了出现表达式 $\dfrac{f(1)}{n}$，一个可行的办法是先将 x^{n-1} 凑微分，再使用分部积分法.

证　由题意

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}(x^n)=\frac{1}{n}x^{n+1}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1[f(x)+xf'(x)]x^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(1)}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1[f(x)+xf'(x)]x^n\,\mathrm{d}x.$$

又因为函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，因此 $f(x)+xf'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，从而 $f(x)+xf'(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，即存在 $M>0$，使得 $|f(x)+xf'(x)|\leqslant M$，故有

$$\frac{1}{n}\left|\int_0^1[f(x)+xf'(x)]x^n\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{n}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{M}{n(n+1)},$$

所以当 $n\to\infty$ 时，$-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1[f(x)+xf'(x)]x^n\,\mathrm{d}x=o\left(\frac{1}{n}\right)$，结论得证.

注　由于当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n+1}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，因此本题的结论等价于

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty.$$

也就是说，本题可以直接将 x^n 凑微分，然后使用分部积分法. 即

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(x^{n+1})=\frac{1}{n+1}x^{n+1}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

后继的证明跟上述解题过程类似.

例 7.2.29　【2009 年北京市竞赛题】利用定积分证明恒等式

$$C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}C_n^n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

证　利用二项式定理展开，

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-x)^k\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k x^{k-1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\cdot\frac{1}{k};$$

又因为

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (1-x)^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}.$$

从而结论得证.

注　本题证明的关键是构造辅助积分 $\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\mathrm{d}x$，通过所证结论可以看到，被积函数的形式应该与二项式定理有关.

例 7.2.30　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right] = \frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)].$$

分析　$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right] = 0$，因此本题属于 $0\cdot\infty$ 类型的未定式.

证　记 $x_k = a+\frac{b-a}{n}k$，$k=1,2,\cdots,n$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\cdot(x-x_k)\mathrm{d}x,$$

利用推广的积分第一中值定理有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k - x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k - x_k}(x_k - x_{k-1})^2$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\cdot\frac{(b-a)^2}{n^2}$$

$$= -\frac{b-a}{2n}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)$$

$$= -\frac{b-a}{2n}\cdot\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{b-a}{2n}[f(b)-f(a)],$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right]=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)].$$

注　在 2016 年全国竞赛预赛题中，考到了本题的一种特殊情况：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

7.3 深 化 训 练

7.3.1　填空题

（1）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n(x+1)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=$________.

（2）【2011 年北京市竞赛题】 设函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=8$， $f(0)=3$，则 $f(\pi)=$________.

（3）【2012 年北京市竞赛题】 $\int_{-1}^{1}[x^7\ln(1+x^2)+\sqrt{1-x^2}]\mathrm{d}x=$________.

（4）设 $f''(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f(2)=\frac{1}{4}$，则积分 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^2 x(2-x)f''(x)\mathrm{d}x=$______.

（5）【2014 年考研题】设 D 是由 $xy+1=0, y+x=0, y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积=________.

（6）【2013 年考研题】 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________.

（7）【2013 年北京市竞赛题】 设函数 $f(x)$ 是一个非负的连续函数，且满足方程 $f(x)f(-x)=1$， $x\in(-\infty,+\infty)$，则定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x=$________.

（8）设 n 为正整数，则 $\int_0^{2n} x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2n)\mathrm{d}x=$________.

7.3.2　单项选择题

（1）【2005 年考研题】设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有（　　）.

（A） $F(x)$ 是偶函数的充要条件是 $f(x)$ 为奇函数；

（B） $F(x)$ 是奇函数的充要条件是 $f(x)$ 为偶函数；

（C） $F(x)$ 是周期函数的充要条件是 $f(x)$ 为周期函数；

（D） $F(x)$ 是单调函数的充要条件是 $f(x)$ 为单调函数.

（2）【2008 年考研题】设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的（　　）.

（A）跳跃间断点；　　（B）可去间断点；

（C）无穷间断点；　　（D）震荡间断点.

（3）【2008 年考研题】如图 7.12 所示，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于（　　）.

（A）曲边梯形 ABOD 的面积；
（B）梯形 ABOD 的面积；
（C）曲边三角形 ACD 的面积；
（D）三角形 ACD 的面积.

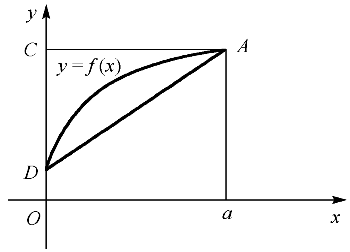

图 7.12

（4）【2009 年考研题】使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t > \ln x$ 成立的 x 的范围是（　　）.

（A）$(0,1)$；　（B）$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$；　（C）$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$；　（D）$(\pi,+\infty)$.

7.3.3　求解下列定积分：

（1）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$；

（2）【2013 年全国竞赛预赛题】$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x$；　（4）$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.

7.3.4　【2012 年全国竞赛预赛题】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

7.3.5　设 $f(x)$ 连续，$\int_0^x t f(x-t)\mathrm{d}t = 1-\cos(2x)$，试求 $\int_0^{\pi/4} xf(x)\mathrm{d}x$.

7.3.6　设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2+2y}\mathrm{d}y$，试求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$.

7.3.7　【2004 年北京市竞赛题】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+x$，且在区间 $[0,\pi]$ 上 $f(x)=\mathrm{e}^x$，求 $\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

7.3.8　设 $f(x)=x-[x]$，其中 $[x]$ 为取整函数，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{3x^3+2x+1}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$.

7.3.9　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明存在一点 $\xi\in[0,1]$ 使得

$$f(1-\xi)+f(\xi)=0.$$

7.3.10　设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，$f(0)=0$，证明在 $(-1,1)$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=3\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ 成立.

7.3.11　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

7.3.12　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=f(b)=0$，试证明：

$$f^2(x) \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b [f'(x)]^2 \mathrm{d}x .$$

7.3.13　【2012 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x .$$

7.3.14　【2012 年全国竞赛预赛试题】 求最小的实数 C，使得满足 $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = 1$ 的连续函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x \leqslant C$.

7.3.15 【2010 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上具有二阶连续正导数，证明

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x \mathrm{d}x \geqslant 0 .$$

7.3.16　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对于任意的 $x\in[0,1]$，有 $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}(1-x^2)$，证明

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{3} .$$

7.3.17　【2016 年全国竞赛预赛题】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$，试证明当 $a\in(0,1)$ 时，有 $\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x$.

7.3.18　【2009 年全国竞赛预赛题】 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围成的图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定常数 a、b 和 c，使得此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

***7.3.19**　【2004 年考研题】 某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部打开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下．现有一质量为 9000 kg 的飞机，着陆时水平速度为 700 km/h，经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$）．问从着落点算起，飞机滑行的最常距离是多少？

（注：kg 表示千克，km/h 表示千米/小时）

7.4　深化训练详解

7.3.1　（1）原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan(n) + \frac{1}{2n}\ln(1+n^2)\right) = \frac{\pi}{2}$.

（2）5；　　（3）$\frac{\pi}{2}$；　　（4）$\frac{1}{4}$；

（5）$\frac{3}{2}-\ln 2$；**提示　解法 1**　如图 7.13 所示，$xy+1=0, y+x=0, y=2$ 的 3 个交点坐标分别是 $(-2,2)$ $\left(-\frac{1}{2},2\right)$，$(-1,1)$.

区域 D 可以分为一个直角三角形和一个曲边三角形，故面积

$$S=\frac{1}{2}+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left[2-\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+(2x+\ln|x|)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

解法 2　$D=\left\{(x,\ y)\middle|1\leqslant y\leqslant 2,-y\leqslant x\leqslant -\frac{1}{y}\right\}$，则

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left(-\ln y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

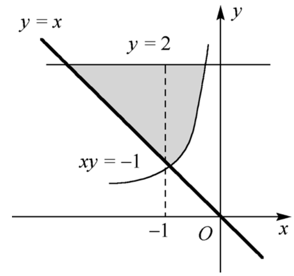

图 7.13

（6）原式$=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}(1+x)^{-1}=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x-\ln(1+x)\right)\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2\,.$$

（7）原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{1+f(-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)\cos x}{f(x)+f(x)f(-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=1\,.$$

（8）0 .

7.3.2　（1）A；　**提示**　若 $F(x)$ 是偶函数，则其导函数 $f(x)$ 为奇函数．反之，若 $f(x)$ 为奇函数，设 $G(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，则

$$G(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=G(x)\,,$$

从而 $G(x)$ 为偶函数， $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 都可以表示为 $F(x)=G(x)+C$ ，从而 $F(-x)=G(-x)+C=G(x)+C=F(x)$ ，故 $F(x)$ 是偶函数，因此选项（A）正确．

若 $F(x)$ 是奇函数，则其导函数 $f(x)$ 为偶函数．反之，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 不一定为奇函数，如取 $f(x)=\cos x$ ， $F(x)=\sin x+1$ ，显然 $f(x)$ 为偶函数，但 $F(x)$ 不是奇函数，选项（B）错误．

若取 $f(x)=\cos x$ ， $F(x)=\sin x+1$ ，显然 $f(x)$ 为周期函数，但 $F(x)$ 不是周期函数．选项（C）错误．

若取 $f(x)=x$ ， $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ ，则知选项（D）错误．

（2）B；**提示**

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=f(0),$$

因此 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点.

（3）C；**提示**　由于

$$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x .$$

（4）A；**提示**　原问题可转化为求

$$f(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x=\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\sin t-1}{t}\mathrm{d}t=\int_x^1\frac{1-\sin t}{t}\mathrm{d}t>0$$

成立时 x 的取值范围，当 $t\in(0,1)$ 时，$\dfrac{1-\sin t}{t}>0$，从而当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$，因此选项 A 正确，类似方法可以证明选项 B、C、D 错误.

7.3.3　（1）原式 $=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^6 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$，

又因为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^6 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x\ \overset{u=-x}{=\!=\!=}\ -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^6 u}{1+\mathrm{e}^{u}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6 u}{1+\mathrm{e}^{u}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6 x}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x,$$

所以

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)\sin^6 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\mathrm{d}x=\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{15}{96}\pi .$$

（2）设 $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-\pi}^0\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^{-x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi}\left(\arctan\mathrm{e}^x+\arctan\mathrm{e}^{-x}\right)\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{8}.
\end{aligned}$$

（3）$I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$，则

$$I_n=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x,$$

令 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$，则 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，从而

$$I_n=-\pi\int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos^{2n}t}{\cos^{2n}t+\sin^{2n}t}\mathrm{d}t=\pi\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos^{2n}x}{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}\mathrm{d}x\,.$$

于是 $2I_n=\pi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$，故 $I_n=\frac{\pi^2}{4}$.

（4）原式 $=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\,\mathrm{d}x\,,$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{令}t=x+\frac{\pi}{4}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &\xlongequal{\text{令}u=\frac{\pi}{2}-t}-\int_{\pi/4}^{0}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\mathrm{d}u\\ &=\int_0^{\pi/4}\ln\cos u\,\mathrm{d}u\,,\end{aligned}$$

所以

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{8}\ln 2\,.$$

7.3.4　解法 1　因为 $x\to+\infty$，因此不妨设 $x>1$，利用积分中值定理，$\exists\xi\in(x,x+1)$，使得

$$\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=\frac{\sin\xi}{\sqrt{\xi+\cos\xi}}\,,$$

因此

$$0\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=\sqrt[3]{x}\frac{\sin\xi}{\sqrt{\xi+\cos\xi}}\leqslant\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}\,,$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0$.

解法 2　因为 $x\to+\infty$，因此不妨设 $x>1$，

$$0\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t=\cdot 2(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=\frac{2\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\,,$$

由夹逼定理可知，原式 $=0$.

7.3.5　令 $u=x-t$，则 $t=x-u$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^x t\,f(x-t)\mathrm{d}t&=-\int_x^0(x-u)\,f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-u)\,f(u)\mathrm{d}u\\&=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x u\,f(u)\mathrm{d}u\\&=1-\cos(2x)\,,\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) = 2\sin(2x),$$

从而

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = 2\sin(2x), \quad f(x) = 4\cos(2x),$$

利用分部积分法，有

$$\int_0^{\pi/4} xf(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi/4} x\cos(2x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} t\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} t\,\mathrm{d}(\sin t)$$

$$= t\sin t\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7.3.6　原式 $=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x-1)^3 = \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3\mathrm{e}^{-x^2+2x}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2\mathrm{e}^{-(x-1)^2+1}\mathrm{d}(x-1)^2 = -\frac{\mathrm{e}}{6}\int_1^0 u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{6}(\mathrm{e}-2).$$

7.3.7　令 $t = x - 2\pi$， $x\in[2\pi, 3\pi]$，则 $t\in[0,\pi]$，从而有

$$\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(t+2\pi)\mathrm{d}t.$$

而对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $f(x) = f(x-\pi)+x$，因此

$$f(t+2\pi) = f(t+\pi)+t+2\pi, \quad f(t+\pi) = f(t)+t+\pi,$$

所以当 $t\in[0,\pi]$ 时， $f(t+2\pi) = f(t)+2t+3\pi = \mathrm{e}^t + 2t + 3\pi$， 故

$$\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(t+2\pi)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\pi} + 4\pi^2 - 1.$$

7.3.8　对于任意的 $x>1$，存在正整数 n，使得 $n\leqslant x<n+1$，从而

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^n (x-n+1)\mathrm{d}x + \int_n^x (x-n)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}[n+(x-n)^2].$$

因为

$$\frac{1}{2(n+1)}[n+(n-n)^2] < \frac{1}{2x}[n+(x-n)^2] < \frac{1}{2n}(n+1),$$

由夹逼定理可知， $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{3x^3+2x+1}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x}{3x^3+2x+1}\cdot\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

7.3.9　令 $t = 1-x$　所以 $-\displaystyle\int_1^0 f(1-t)\mathrm{d}t = 0$，即 $\displaystyle\int_0^1 f(1-t)\mathrm{d}t = 0$，因此

$$\int_0^1 [f(1-x)+f(x)]\,\mathrm{d}x = 0,$$

根据积分中值定理可以证明结论成立.

7.3.10　令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1)-F(-1)$，利用麦克劳林展开，则至少存在两点 $\xi_1\in(0,1)$ 和 $\xi_2\in(-1,0)$，使得

$$F(1)=F(0)+f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{3!}f''(\xi_1),$$

$$F(-1)=F(0)-f(0)+\frac{1}{2}f'(0)-\frac{1}{3!}f''(\xi_2),$$

两式相减得

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)],$$

由达布定理即可知，至少存在一定 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$，使得 $f''(\xi)=3\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

7.3.11　**提示**　按 $x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 和 $x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 进行分类讨论.

7.3.12　由于 $f(a)=f(b)=0$，因此

$$f(x)=\int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_b^x f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

从而

$$2|f(x)|=\left|\int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^x |f'(x)|\mathrm{d}x+\int_x^b |f'(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x .$$

故 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$，故结合柯西–施瓦兹不等式有

$$f^2(x)\leqslant\frac{1}{4}\left[\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x\right]^2=\frac{1}{4}\left[\int_a^b 1\cdot|f'(x)|\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\frac{1}{4}\int_a^b 1^2\,\mathrm{d}x\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{b-a}{4}\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x .$$

7.3.13　**证法 1**　由于 $f(a)=f(b)=0$，因此 $f(x)=\int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_x^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

当 $x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 时，利用柯西–施瓦兹不等式有

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^x 1^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x\le(x-a)\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x .$$

当 $x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 时，类似地有

$$f^2(x)=\left(\int_x^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_x^b 1^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_x^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(b-x)\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x .$$

因此

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\mathrm{d}x\right)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{4}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x .$$

证法 2　利用习题 7.3.12 的结论：$f^2(x) \leqslant \dfrac{b-a}{4}\displaystyle\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x$，则有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x .$$

7.3.14　由题意，可知

$$\left|\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t|f(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = 2 ,$$

即 $C \leqslant 2$. 取特殊函数列 $f_n(x) = (n+1)x^n$，显然有 $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = 1$，而

$$\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x = 2\int_0^1 tf_n(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (n+1)t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{2(n+1)}{n+2} < 2 ,$$

且 $n \to \infty$ 时，$\displaystyle\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x \to 2$，因此最小的实数 $C = 2$.

7.3.15　利用分部积分法有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}(\sin x) = f(x)\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}f(x)$$

$$= -\int_0^{2\pi} f'(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= f'(x)\cos x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$= f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi} f''(x)(1-\cos x)\mathrm{d}x \geqslant 0 .$$

故结论成立.

7.3.16　由于 $\displaystyle\int_0^1 [f(x)-x]^2\mathrm{d}x \geqslant 0$，而

$$\int_0^1 [f(x)-x]^2\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{3} ,$$

因此有

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{3} .$$

由题设，

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left[\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t f(t)\mathrm{d}x = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t ,$$

因此有

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

7.3.17　设 $F(a)=\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2-\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x$，则 $F(0)=0$，且

$$F'(a)=2f(a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-f^3(a)=f(a)\left[2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-f^2(a)\right].$$

记 $G(a)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-f^2(a)$，显然 $G(0)=0$，且

$$G'(a)=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-f^2(a)=2f(a)-2f(a)f'(a)>0,$$

从而 $G(a)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增．$G(a)>G(0)=0$，故 $F'(a)>0$，从而 $F(a)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，且 $F(a)>F(0)=0$，结论得证．

7.3.18　由于当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $\ln c=0$，即 $c=1$．又因为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3},$$

所以 $b=\frac{2}{3}(1-a)$，而旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)\\&=\frac{\pi}{5}a^2+\frac{\pi}{3}a(1-a)+\frac{4\pi}{27}(a-1)^2.\end{aligned}$$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0$，解得唯一驻点 $a=-\frac{5}{4}$，则 $b=\frac{3}{2}$，从而抛物线方程为

$$y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x.$$

容易验证，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$．又因为 $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}}>0$，所以当 $a=-\frac{5}{4}$ 时，旋转体的体积 V 达到最小．综上，$a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=1$．

7.3.19　设飞机着陆时 $t=0$，飞机在 t 时刻的速度为 $v=v(t)$，根据牛顿第二定律，阻力 $F=ma$，其中 m 为质量，a 为加速度．因此有 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，即 $\frac{1}{v}\mathrm{d}v=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$．等式两边同时积分 $\int\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\int-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$，所以 $\ln v=-\frac{k}{m}t+C_1$，从而 $v=C\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}$，又因为 $v(0)=700$，故有

$$v=700\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}.$$

飞机滑行的最大距离为

$$S=\int_0^{+\infty}700\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}\mathrm{d}t=\frac{700m}{k}=1.05\ (\mathrm{km}).$$

第 8 章　多元函数微分学

8.1　知 识 要 点

本章主要包括多元函数的极限与连续、偏导数、方向导数与梯度、全微分、多元函数的复合函数求导法则、隐函数求导法则、多元函数的极值与最值等内容.

8.1.1　二元函数的极限与连续性

定义　设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某去心邻域内有定义，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ 时，恒有

$$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

注　由定义，若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，则点 (x,y) 沿任意路径无限趋近于点 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 均无限趋近于常数 A．若选取两条不同的路径使得 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限不同，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在.

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，否则称 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处间断.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内任一点均连续，则称该函数在区域 D 内连续.

多元连续函数的性质：

（1）多元初等函数在其定义区域内（即包含在定义域内的区域或闭区域）均连续.

（2）有界闭域上的连续函数的性质：如果 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则

1）**有界性定理**　$f(x,y)$ 在 D 上有界;

2）**最值定理**　$f(x,y)$ 在 D 上能够取到最大值与最小值;

3）**介值定理**　$f(x,y)$ 在 D 上能够取到介于最小值与最大值之间的一切值.

8.1.2　偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 对自变量 x 的偏导数定义为一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在点 x_0 的导数，即

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

并记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}，\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}，\quad z'_x(x_0,y_0)，\quad f'_x(x_0,y_0).$$

同理定义 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 对自变量 y 的偏导数为一元函数 $z=f(x_0,y)$ 在点 y_0 的导数，即

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数（简称偏导数）定义为

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

也记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $z'_x(x,y)$．同理，定义 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数为

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

偏导数的几何意义

$f'_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 在空间点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率；

$f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 在空间点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率；

注　若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 均存在，则仅仅保证曲面在点 (x_0,y_0) 处沿 x 轴和 y 轴两个方向上可导（从而连续），不能保证曲面在点 (x_0,y_0) 处沿任意方向均连续，所以 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不一定连续．

8.1.3　高阶偏导数

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的二阶偏导数分别为

$$f''_{xx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_x(x_0+\Delta x,y_0)-f'_x(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'_x(x,y_0)-f'_x(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(x_0,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f'_x(x_0,y)-f'_x(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

$$f''_{yx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(x_0+\Delta x,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'_y(x,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f''_{yy}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_y(x_0,y_0+\Delta y)-f'_y(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f'_y(x_0,y)-f'_y(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 的 n 阶偏导数共有 2^n 个．三元函数的 n 阶偏导数共有 3^n 个．

定理　若函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内有 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

该结论可推广到高阶，即高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下与求导次序无关．

8.1.4　全微分

定义　若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\,,\qquad \rho\to 0\,,$$

其中 A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微．$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分，记为 $\mathrm{d}z$，即 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$．

定理 1　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续．

定理 2　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在，且 $f'_x(x,y)=A,\ f'_y(x,y)=B$．

定理 3　若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微．

注 1　定理 2 说明若函数在点 (x,y) 处可微，则全微分形式是唯一的，即

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\quad 或\quad \mathrm{d}f(x,y)=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

注 2　设 $z=f(u,v)$，无论 u，v 是自变量，还是中间变量，全微分形式

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

均保持不变，此性质称为**全微分形式不变性**．

注 3　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内有定义，则函数的极限、连续、偏导数及全微分之间的关系如图 8.1 所示．

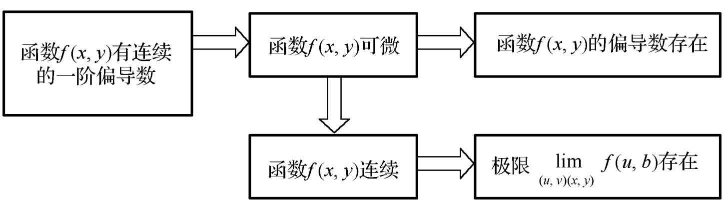

图 8.1　函数 $f(x,y)$ 连续、可微及其偏导数之间的关系

需要注意的是上述关系逆推不一定成立．

*8.1.5　方向导数与梯度

1．方向导数

若 $f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 P 处沿任一方向 $\mathbf{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f'_x\cos\alpha+f'_y\cos\beta\,,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 是方向 $\mathbf{l}$ 的方向余弦．

若 $f(x,y,z)$ 在 $P(x,y,z)$ 处可微，则 $f(x,y,z)$ 在点 P 处沿任一方向 $\mathbf{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的

方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x'\cos\alpha+f_y'\cos\beta+f_z'\cos\gamma\ .$$

2．梯度

设 $f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则 $f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\textbf{grad}\ f(x,y)=f_x'\mathbf{i}+f_y'\mathbf{j}=(f_x',f_y')\ .$$

8.1.6　多元复合函数微分法

设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可偏导，$z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z=f[u(x,y),\ v(x,y)]$ 在点 $(x,\ y)$ 处可偏导，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\ .$$

可推广到中间变量多于两个、多次复合的情形.

8.1.7　隐函数微分法

定理 1　设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'}{F_y'}\ .$$

定理 2　设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}\ .$$

8.1.8　多元函数的极值

定理 1　（必要条件）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数，并且在 (x_0,y_0) 处取得极值，则

$$f_x'(x_0,y_0)=0,\ f_y'(x_0,y_0)=0\ .$$

一阶偏导数均为零的点称为函数的驻点．可能的极值点有两类：驻点和偏导数不存在的点.

定理 2　（充分条件）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的二阶偏导数连续，且 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的驻点．令

$$A=f_{xx}''(x_0,y_0)，\quad B=f_{xy}''(x_0,y_0)，\quad C=f_{yy}''(x_0,y_0)\ .$$

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极值，并且当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极小值；当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值.

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不取极值.

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可能取极值，也可能不取极值.

8.1.9　条件极值与拉格朗日乘数法

求目标函数 $z=f(x,y)$ 满足约束条件 $\phi(x,y)=0$ 的极值.

解法 1　由条件 $\phi(x,y)=0$ 解出 $y=y(x)$ （或 $x=x(y)$ ），代入目标函数 $f(x,y)$ ，转化为一元函数 $z(x)=f(x,y(x))$ ，或 $z(y)=f(x(y),y)$ 的无条件极值问题.

解法 2　（利用拉格朗日乘数法）构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y),$$

令

$$\begin{cases} L'_x=f'_x(x,y)+\lambda\phi'_x(x,y)=0 \\ L'_y=f'_y(x,y)+\lambda\phi'_y(x,y)=0, \\ L'_\lambda=\phi(x,y)=0 \end{cases}$$

解得拉格朗日函数的驻点，再由实际条件判断是否是极值点.

注　拉格朗日乘数法可以推广到变量多于两个、条件多于一个的情形，如求函数 $u=f(x,y,z)$ 满足约束条件 $\phi_1(x,y,z)=0$ 和 $\phi_2(x,y,z)=0$ 的极值，只需设拉格朗日函数为

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\phi_1(x,y,z)+\lambda_2\phi_2(x,y,z),$$

求拉格朗日函数的驻点即可.

8.1.10　多元函数的最值

设多元函数 f 在有界闭域 G 上连续，则 f 在 G 上一定存在最大值与最小值，且最值求法如下：

（1）先求出 f 所有可能的最值点，即 f 在 G 内部的驻点、偏导数不存在的点、 f 在 G 的边界上的可能最值点；

f 在 G 的边界上的可能最值点，属于条件极值问题，可以转化为无条件极值或使用拉格朗日乘数法求得；

（2）比较函数 f 在上述所有点的函数值即可（无需讨论这些点是否是极值点），其中最大者为 f 在 G 上的最大值，最小者为 f 在 G 上的最小值.

8.2　典型例题分析

8.2.1　题型一、多元函数的极限与连续问题

在求多元函数极限时，一元函数极限的四则运算法则、复合函数极限法则、等价无穷小替换、夹逼准则等相关法则和结论可以移植使用，但需要注意使用条件.

多元函数极限常用的求法主要有以下几种：

（1）利用极限定义求极限；

（2）化为一元函数的极限；

（3）当 $(x,\ y)\to(0,0)$ 时可化为极坐标 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 求极限，此时 $(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to0^+$ ，但注意 θ 可以任意变化；

（4）利用无穷小量乘以有界变量仍为无穷小量；

（5）利用极限运算法则；

（6）利用夹逼准则求极限.

例 8.2.1　判断以下极限是否存在，若存在，求其值：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$；　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{y}$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$；　（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$；　（6）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解　（1）　设 $\sqrt{x^2+y^2}=t$，则原极限变为

$$\lim_{t\to0^+}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t^2}{2}}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{y}=0$.

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=0$，

其中利用了无穷小量乘以有界变量仍为无穷小的结论.

（4）当点 (x,y) 沿不同直线 $y=kx$ 趋近 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

极限值与 k 有关，说明当点 (x,y) 沿不同直线 $y=kx$ 趋近 $(0,0)$ 时，函数的极限不相同，所以原极限不存在.

（5）当点 (x,y) 沿不同曲线 $y=kx^2$ 趋近 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot kx^2}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

极限值与 k 有关，说明当点 (x,y) 沿不同曲线 $y=kx^2$ 趋近 $(0,0)$ 时，函数的极限不相同，所以原极限不存在.

注　如果点 (x,y) 沿不同直线 $y=kx$ 趋近 $(0,0)$ 时，函数的极限均是 0，但不能说明原极限存在．用特殊路径看函数的趋势，只能说明函数的极限不存在，不能证明函数极限存在.

（6）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[(x^2+y^2)^{x^2+y^2}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$，

由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2+y^2}=\lim_{u\to0^+}u^u=\lim_{u\to0^+}\mathrm{e}^{u\ln u}=1,$$

且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}=0,$$

其中用到

$$\lim_{u\to0^+}u\ln u=\lim_{u\to0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}=\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=0,$$

所以原极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1^0=1.$$

解法 2　设 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{r\to0^+}(r^2)^{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}=\lim_{r\to0^+}\left[(r^2)^{r^2}\right]^{r^2\cos^2\theta\sin^2\theta}=1^0=1.$$

例 8.2.2　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}+1}, & x\neq0,\ y\text{任意}\\ 0, & x=0,\ y\text{任意}\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解　当点 (x,y) 沿 $y=0$ 趋近 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}0=0$；

当点 $(x,\ y)$ 沿 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ 趋近 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

例 8.2.3　设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$. 求：（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；（2）$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

解　（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}$；

（2）
$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}+2\pi}{2}=\pi.$$

8.2.2　题型二、偏导数的概念问题

例 8.2.4　已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则下列结论正确的是（　　）.

A. $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都存在；　　B. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在；

C. $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在；　　D. $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都不存在.

解　$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$，不存在

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0,$$

故选 B.

例 8.2.5　【2008 年北京市竞赛题】设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2,$$

求 $2f'_x(0,0)+f'_y(0,0)$.

解法 1　由 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，得 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$，当 (x,y) 沿路径 $y=0$ 趋近 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)+3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x,0)}{x}+3}{x}=2,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=-3,$$

即

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=-3\ .$$

当 (x,y) 沿 $x=0$ 路径趋近 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-4y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{f(0,y)}{y}-4}{y}=2,$$

所以 $f'_y(0,0)=4$．故

$$2f'_x(0,0)+f'_y(0,0)=-2\ .$$

解法 2　（用全微分求解）$f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$，由已知极限，得

$$\frac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2+\alpha,$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha=0$，即

$$f(x,y)+3x-4y=(2+\alpha)(x^2+y^2).$$

记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$f(x,y)-f(0,0)=-3x+4y+o(\rho),$$

由全微分形式的唯一性，得 $f_x'(0,0)=-3$ ， $f_y'(0,0)=4$，故

$$2f_x'(0,0)+f_y'(0,0)=-2 .$$

8.2.3　题型三、多元函数的全微分问题

例 8.2.6　【2007 年北京市竞赛题】设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内可微，且

$$f(x,y+1)=1+2x+3y+o(\rho)，\quad \rho\to 0，$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ，求由方程 $f(x,y)=1$ 所确定的函数在 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解　由题意

$$f(0,1)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y+1)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[1+2x+3y+o(\rho)\right]=1，$$

所以等式变为

$$f(0+x,1+y)=f(0,1)+2x+3y+o(\rho)，\quad \rho\to 0，$$

由全微分形式的唯一性，即

$$f(0+x,1+y)=f(0,1)+f_x'(0,1)x+f_y'(0,1)y+o(\rho)，\quad \rho\to 0，$$

得

$$f_x'(0,1)=2,\ f_y'(0,1)=3 .$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-\left.\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}\right|_{x=0}=-\frac{f_x'(0,1)}{f_y'(0,1)}=-\frac{2}{3} .$$

注　偏导数也可以用定义式求解，即

$$f_x'(0,1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x+o(x)-1}{x}=2 .$$

例 8.2.7　设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，判断

（1） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性；

（2） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性；

（3） $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性；

（4） $f_{xy}''(0,0)$ 与 $f_{xy}''(0,0)$ 的存在性.

解　（1） $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$ ，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

（2） $\displaystyle f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)\ -f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{|x|}=0$ ，

同理 $f_y'(0,0)=0$.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微.

（3） $$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases},$$

因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x'(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

不存在，所以 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

（4） $$f_{xx}''(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_x'(x,0)-f_x'(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{x}{|x|}\cos\dfrac{1}{|x|}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2\sin\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}\right),$$

上述极限不存在，而

$$f_{xy}''(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0.$$

例 8.2.8 【2007 年北京市竞赛题】 设二元函数 $f(x,y)=|x-y|\phi(x,y)$，其中 $\phi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充要条件是 $\phi(0,0)=0$.

证　必要性 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则 $f_x'(0,0)$ 存在.

即

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\phi(x,0)}{x}$$

存在，由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\phi(x,0)}{x}=\phi(0,0),\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\phi(x,0)}{x}=-\phi(0,0),$$

所以 $\phi(0,0)=-\phi(0,0)$，即 $\phi(0,0)=0$.

充分性　若 $\phi(0,0)=0$，则

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\phi(x,0)}{x}=0,$$

同理 $f_y'(0,0)=0$．所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y]}{\rho}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|\phi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由 $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为有界变量，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\phi(x,y)=\phi(0,0)=0$，所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y]}{\rho}=0,$$

由可微的定义，得 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

*8.2.4　题型四、多元函数的方向导数和梯度的求解

例 8.2.9　函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 ________ .

解　$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$，单位化得，

$$\mathbf{l}=\frac{1}{3}(2,-2,1)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A\cos\gamma=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+0\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

例 8.2.10　已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解　$f(x,y)$ 沿着梯度的方向导数最大，且最大值为梯度的模．由 $f_x'(x,y)=1+y$，$f_y'(x,y)=1+x$，得

$$\mathbf{grad}f(x,y)=(1+y)\mathbf{i}+(1+x)\mathbf{j},$$

模为 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$．即求 $g(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值，转化为求 $d(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

设拉格朗日函数为 $L(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$，令

$$\begin{cases}L_x'=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0\\ L_y'=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0,\\ L_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$

得到可能的条件极值点为 $M_1(1,1)$，$M_2(-1,-1)$，$M_3(2,-1)$，$M_4(-1,2)$．由

$$d(M_1)=8,\quad d(M_2)=0,\quad d(M_3)=9,\quad d(M_4)=9,$$

比较函数值得所求最大值为 $\sqrt{9}=3$，即在 $M_3(2,-1)$ 处 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的方向导数最大，为 3.

例 8.2.11　设有一座小山，取它的底面所在的平面为 xoy 面，其底部所占的区域为

$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

（1）设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若此方向的方向导数为 $g(x_0,y_0)$，写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式；

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚下寻找一个上山坡度最大的点作为攀登的起点，即要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使（1）中 $g(x,y)$ 达到最大值的点，试确定攀登起点的位置.

解　（1）由于函数的梯度方向是方向导数最大的方向，所以函数 $h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度方向的方向导数最大，且方向导数的最大值为梯度向量的模.

$h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的梯度方向为

$$\mathbf{grad}h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=(-2x_0+y_0,-2y_0+x_0),$$

所以方向导数的最大值为

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}.$$

（2）根据题意，即求 $g(x,y)$ 在条件 $x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值点，即

$$g^2(x,y)=(y-2x)^2+(x-2y)^2=5x^2+5y^2-8xy$$

在条件 $x^2+y^2\text{-}xy-75=0$ 下的最大值点.

用拉格朗日乘数法，设 $L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75)$，令

$$\begin{cases}L'_x=10x-8y+\lambda(2x-y)=0\\ L'_y=10y-8x+\lambda(2y-x)=0,\\ L'_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0\end{cases}$$

解得可能的条件极值点为 $M_1(5,-5)$，$M_2(-5,5)$，$M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$，$M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$.

函数值 $f(M_1)=f(M_2)=450$，$f(M_3)=f(M_4)=150$.

因为实际问题存在最大值，且只可能在 M_1,M_2,M_3,M_4 中取到，所以 $g^2(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值在 M_1,M_2 处取到，即 $M_1(5,-5)$，$M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点.

8.2.5　题型五、多元函数的复合求导与隐函数求导问题

例 8.2.12　设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,2)=2$，$f'_x(1,2)=3$，$f'_y(1,2)=4$，$\phi(x)=f(x,f(x,2x))$，则 $\phi'(1)=$________.

解　$\phi'(x)=f'_1(x,f(x,2x))+f'_2(x,f(x,2x))\cdot\left[f'_1(x,2x)+2f'_2(x,2x)\right]$，代入已知条件，得

$$\phi'(1)=f'_1(1,2)+f'_2(1,2)[f'_1(1,2)+2f'_2(1,2)]=3+4\times(3+8)=47.$$

例 8.2.13　设函数 $z=f[xy,yg(x)]$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot y+f'_2\cdot yg'(x)$，因为 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值，因此 $g'(1)=0$.

又因为 $g(1)=1$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1'[y,yg(1)]y=f_1'(y,y)\cdot y,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}[yf_1'(y,y)]\right|_{y=1}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

注　本题中混合偏导数的求解利用了偏导数的定义．也可以先求混合偏导函数，即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot yg'(x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\,[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot g(x)]+f_2'g'(x)+yg'(x)[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot g(x)],$$

再代入 $x=1,\ y=1$ 即为所求，但比原解法计算复杂．

例 8.2.14　方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，其中 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数，求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

解法 1　设 $G(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$，则

$$G_x'=cF_1',\ G_y'=cF_2',\quad G_z'=-aF_1'-bF_2',$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x'}{G_z'}=\frac{cF_1'}{aF_1'+bF_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y'}{G_z'}=\frac{cF_2'}{aF_1'+bF_2'},$$

故

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

注　利用二元隐函数求导公式时，必须注意公式中的函数应是方程 $F(x,y,\ z)=0$ 左侧的以 x,y,z 为自变量的三元函数，分别求该三元函数的三个偏导数，再用公式．如果原方程左侧不是三元函数 $F(x,y,\ z)$，则需要重新设三元函数．

解法 2　方程两边分别对 x 和 y 求偏导，得

$$F_1'\cdot\left(c-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2'\cdot\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$F_1'\cdot\left(-a\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F_2'\cdot\left(c-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{cF_1'}{aF_1'+bF_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{cF_2'}{aF_1'+bF_2'},$$

故

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

例 8.2.15　【2015 年全国竞赛预赛题】 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数，且 $xF_u'+yF_v'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.（结果要求不显含 F 及其偏导数。）

解法 1　设 $G(x,y,z)=F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)$，则

$$G_x'=F_u'-\frac{z}{x^2}F_v',\ G_y'=-\frac{z}{y^2}F_u'+F_v',\quad G_z'=\frac{1}{y}F_u'+\frac{1}{x}F_v',$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x'}{G_z'}=\frac{\frac{yz}{x}F_v'-xyF_u'}{xF_u'+yF_v'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y'}{G_z'}=\frac{\frac{xz}{y}F_u'-xyF_v'}{xF_u'+yF_v'},$$

故

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

解法 2　方程两边分别对 x 和 y 求偏导，得

$$F_u'\cdot\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_v'\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)=0,$$

$$F_u'\cdot\left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}\right)+F_v'\cdot\left(1+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

解得

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF_v'-x^2yF_u'}{xF_u'+yF_v'},\quad y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xzF_u'-xy^2F_v'}{xF_u'+yF_v'},$$

故

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

例 8.2.16　【2011 年全国竞赛预赛题】设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，其中 F 具有连续的二阶偏导数，且 $F_u'(u,v)+F_v'(u,v)\neq 0$．求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解　设 $G(x,y,z)=F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)$，则

$$G_x'=F_u'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad G_y'=F_v'\cdot\left(\frac{1}{y^2}\right),\quad G_z'=F_u'+F_v',$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x'}{G_z'}=\frac{F_u'}{x^2(F_u'+F_v')}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_v'}{y^2(F_u'+F_v')}\,,$$

故

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0\,.$$

对上式两边分别关于 x、y 求偏导，得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\frac{\partial z}{\partial x}\,,\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y\frac{\partial z}{\partial y}\,,$$

上式第一式乘以 x 加上第二式乘以 y，并由 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 得

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\,.$$

注　偏导数也可以通过对方程两边求偏导得到，方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 两边分别关于 x、y 求偏导，得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x^2}\right)F_u'+\frac{\partial z}{\partial x}F_v'=0\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}F_u'+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{y^2}\right)F_v'=0\,.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u'}{x^2(F_u'+F_v')}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_v'}{y^2(F_u'+F_v')}\,.$$

例 8.2.17　【2009 年北京市竞赛题】设 $z=z(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，变换 $u=x-2y,v=x+3y$，且 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$.

解　如图 8.2 所示，由已知得

$$x=\frac{3}{5}u+\frac{2}{5}v,\quad y=-\frac{1}{5}u+\frac{1}{5}v\,,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{3}{5}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{2}{5}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{5}\right)=0\,.$$

解法 2　如图 8.3 所示，根据链式法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+3\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

代入 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $25\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$．

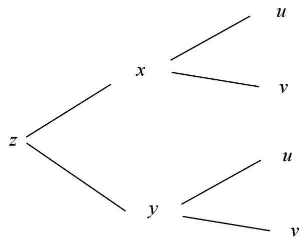

图 8.2　树形图

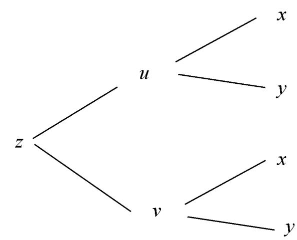

图 8.3　树形图

注　解法 1 将 z 视为以 x, y 为中间变量，u, v 为自变量的复合函数；解法 2 将 z 视为以 u, v 为中间变量，x, y 为自变量的复合函数，对于本题而言，解法 1 比较简单．

例 8.2.18　【2012 年全国竞赛题】已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a，b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$．

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu\,(x,y)\right],$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=\mathrm{e}^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u\,(x,y)\right].$$

若使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$，只有

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0,$$

即 $a=b=1$．

例 8.2.19　设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 .$$

确定 a,b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay$，$\eta=x+by$ 下化简为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

解　由题意

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

将以上各个式子代入等式，可得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0 .$$

令 $\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\end{cases}$，解得

$$\begin{cases}a=-2\\b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}, \quad \begin{cases}a=-\dfrac{2}{5}\\b=-2\end{cases}, \quad \begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}, \quad \begin{cases}a=-\dfrac{2}{5}\\b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}.$$

由 $10ab+12(a+b)+8\neq 0$，舍去 $\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$，$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{5}\\b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$，因此可知，$a=-2$，$b=-\dfrac{2}{5}$ 或 $a=-\dfrac{2}{5}$，$b=-2$.

解法 2　由变换 $\xi=x+ay$，$\eta=x+by$，得

$$x=\frac{-b}{a-b}\xi+\frac{a}{a-b}\eta, \quad y=\frac{1}{a-b}\xi-\frac{1}{a-b}\eta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{-b}{a-b}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{a-b},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}&=\frac{-b}{a-b}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]+\frac{1}{a-b}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\\&=\frac{-b}{a-b}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{a}{a-b}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{1}{a-b}\right]+\frac{1}{a-b}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{a}{a-b}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{1}{a-b}\right]\\&=\frac{-ab}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{a+b}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

若使 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，即 $ab\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(a+b)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，由已知 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，只需 $ab=\dfrac{4}{5}$， $a+b=-\dfrac{12}{5}$，解得 $a=-2$， $b=-\dfrac{2}{5}$ 或 $a=-\dfrac{2}{5}$， $b=-2$.

例 8.2.20　【2012 年北京市竞赛题】设 $u=f(x,y)$ 为可微函数，则：

（1）若 $u=f(x,y)$ 满足方程 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，试证 $f(x,y)$ 在极坐标系中只是 θ 的函数，而与 r 无关；

（2）若 $u=f(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，试证 $f(x,y)$ 在极坐标系中只是 r 的函数，而与 θ 无关.

证　在极坐标系中， $u=f(x,y)$ 的表达式为 $u=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

（1）要证明 u 在极坐标系下与 r 无关，只需证明 u 对 r 的偏导数为 0 即可．因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\\&=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot r\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\sin\theta\right)=\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0,\end{aligned}$$

所以， u 只是 θ 的函数，而与 r 无关.

（2）由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\theta}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\\&=-\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot r^2\sin\theta\cos\theta\\&=-r^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0,\end{aligned}$$

由此可见， u 只是 r 的函数，而与 θ 无关.

8.2.6　题型六、多元函数的极值和最值问题

例 8.2.21　设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

（B）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

（C）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点；

（D）所给条件无法判断 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

解　在点 $(0,0)$ 的某空心邻域内，有

$$\frac{1}{2}<\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}<\frac{3}{2},$$

即

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2+xy<f(x,y)<\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+xy,$$

$f(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的任意小邻域内有正有负，所以点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点．故选项 A 正确．

例 8.2.22　【2008 年北京市竞赛题】设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且有

$$f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2}),$$

$$g(x,y)=f(\mathrm{e}^{xy},x^2+y^2),$$

证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值.

证　由已知 $f(x,y)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，得

$$f(1,0)=0,\ f_x'(1,0)=f_y'(1,0)=-1\ .$$

又

$$g_x'=f_1'\cdot\mathrm{e}^{xy}y+f_2'\cdot 2x,\quad g_y'=f_1'\cdot\mathrm{e}^{xy}x+f_2'\cdot 2y,$$

所以 $g_x'(0,0)=0$, $g_y'(0,0)=0$, 即 $(0,0)$ 为 $g(x,y)$ 的驻点.

$$g_{xx}''=(f_{11}''\cdot\mathrm{e}^{xy}y+f_{12}''\cdot 2x)\mathrm{e}^{xy}y+f_1'\cdot\mathrm{e}^{xy}y^2+(f_{21}''\cdot\mathrm{e}^{xy}y+f_{22}''\cdot 2x)2x+2f_2',$$

$$g_{xy}''=(f_{11}''\cdot\mathrm{e}^{xy}x+f_{12}''\cdot 2y)\mathrm{e}^{xy}y+f_1'\cdot(\mathrm{e}^{xy}xy+\mathrm{e}^{xy})+(f_{21}''\cdot\mathrm{e}^{xy}x+f_{22}''\cdot 2y)2x,$$

$$g_{yy}''=(f_{11}''\cdot\mathrm{e}^{xy}x+f_{12}''\cdot 2y)\mathrm{e}^{xy}x+f_1'\cdot\mathrm{e}^{xy}x^2+(f_{21}''\cdot\mathrm{e}^{xy}x+f_{22}''\cdot 2y)2y+2f_2',$$

所以

$$A=-2,\quad B=-1,\quad C=-2\ .\quad AC-B^2=3>0,A<0,$$

故 $g(0,0)=f(1,0)=0$ 为 $g(x,y)$ 的极大值.

例 8.2.23　已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y$，并且 $f(1,1)=2$，求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解　由 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$ 可知

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\ .\ 由\frac{\partial f}{\partial x}=2x,$$

得 $f(x,y)=x^2+C(y)$，代入 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y$，得 $C'(y)=-2y$，解得 $C(y)=-y^2+C$，即 $f(x,y)=x^2-y^2+C$．代入 $f(1,1)=2$，得 $C=2$，故

$$f(x,y)=x^2-y^2+2\ .$$

显然 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，故 $f(x,y)$ 在 D 上可以取到最大值和最小值.

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，得 D 内部的驻点为 $z=f(x,y)$，且 $f(0,0)=2$．再求 $f(x,y)$ 在边界曲线 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的可能的最值点.

构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$，令

$$\begin{cases} L_x'=2x+2\lambda x=0 \\ L_y'=-2y+\dfrac{1}{2}\lambda y=0, \\ L_\lambda'=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0 \end{cases}$$

解得 $f(x,y)$ 在边界曲线 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的可能的最值点为 $(0,2)$，$(0,-2)$，$(0,2)$，$(1,0)$，且 $f(0,\pm 2)=-2$，$f(\pm1,0)=3$．

比较以上 5 个可能最值点的函数值，即得 $z=f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值为 $f(\pm1,0)=3$ 和最小值为 $f(0,\pm 2)=-2$．

例 8.2.24　【2012 年北京市竞赛题】求内接于球面 $x^2+y^2+z^2=r^2\ (r>0)$ 的长方体的最大体积.

解　设长方体的各面平行于坐标面，在第一卦限的顶点的坐标为 (x,y,z)，那么这个长方体的体积是 $V=8xyz$．构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-r^2),$$

则解方程组

$$\begin{cases} L_x'=8yz+2\lambda x=0 \\ L_y'=8xz+2\lambda y=0 \\ L_z'=8xy+2\lambda z=0 \\ L_\lambda'=x^2+y^2+z^2-r^2=0 \end{cases},$$

得 $x=y=z=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$，由问题的实际意义可知此问题一定有最大值，则这个唯一的驻点即是所求最大值点，即最大体积为 $\dfrac{8r^3}{3\sqrt{3}}$．

8.2.7　题型七、多元函数微分学的综合问题

例 8.2.25　设 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$, $f(x,0)=x^2$,　$f(0,y)=y$, 求 $f(x,y)$．

解　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 两边对 y 偏积分，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+C_1(x)\ ,$$

再对 x 偏积分，得

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\int_0^x C_1(x)\,\mathrm{d}x+C_2(y)\ ,$$

代入 $f(x,0)=x^2$，$f(0,y)=y$，解得 $\int_0^x C_1(x)\,\mathrm{d}x=x^2, C_2(y)=y$，即

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x^2+y\ .$$

例 8.2.26　【2006 年北京市竞赛题】设二元函数 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，且 $f(0,1)=f(1,0)$，证明在 $x^2+y^2=1$ 上至少存在两个不同的点满足 $y\dfrac{\partial f}{\partial x}=x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

证　令 $F(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$，则 $F(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可导，且 $F(0)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=F(2\pi)$,

由罗尔定理可知，至少存在两点 $\xi,\eta\in(0,2\pi)$, 使得

$$F'(\xi)=F'(\eta)=0\ ,$$

又

$$F'(\theta)=-\sin\theta\, f_x'(\cos\theta,\sin\theta)+\cos\theta\, f_y'(\cos\theta,\sin\theta)\ ,$$

所以在 $x^2+y^2=1$ 上至少存在两个不同的点满足 $y\dfrac{\partial f}{\partial x}=x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

例 8.2.27　知函数 $f(x,y)$ 满足 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，$f_x'(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，$f(0,y)=y^2+2y$，求 $f(x,y)$ 的极值.

解　对 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$ 两端对 y 积分，得

$$f_x'(x,y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+\phi_1(x)\ .$$

则 $f_x'(x,0)=\phi_1(x)$. 由已知 $f_x'(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，得 $\phi_1(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，从而

$$f_x'(x,y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x\ .$$

再对 $f_x'(x,y)$ 两端对 x 积分，可得

$$f(x,y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+\phi_2(y)\ .$$

由于 $f(0,y)=y^2+2y$，所以有 $\phi_2(y)=0$，故

$$f(x,y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\ .$$

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x=0 \\ f_y'(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x=0 \end{cases}$，解得 $x=0$，$y=-1$，而

$$A=f_{xx}''(0,-1)=1,\quad B=f_{xy}''(0,-1)=0,\quad C=f_{yy}''(0,-1)=2\ .$$

$$AC-B^2>0,\quad A>0,$$

所以 $f(x,y)$ 的极小值为 $f(0,-1)=-1$.

例 8.2.28　已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转一周所成旋转体的体积.

解　因为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，故有 $f(x,y)=y^2+2y+\phi(x)$，其中 $\phi(x)$ 为待定函数. 又因为

$$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y=y^2+2y+1-(2-y)\ln y,$$

则

$$\phi(y)=1-(2-y)\ln y,$$

从而

$$f(x,y)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x=(y+1)^2-(2-x)\ln x.$$

令 $f(x,y)=0$，可得 $(y+1)^2=(2-x)\ln x$，当 $y=-1$ 时，得 $x=1$ 或 $x=2$，从而所求的体积为

$$V=\pi\int_1^2(y+1)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\pi\left[\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\ln x\right]_1^2-\pi\int_1^2\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi 2\ln 2-\pi\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\pi 2\ln 2-\frac{5\pi}{4}=\pi\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right).$$

8.3　深 化 训 练

8.3.1　单项选择题

（1）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是（　　）.

（A）$x_1>x_2,y_1<y_2$；　　（B）$x_1>x_2,y_1>y_2$；

（C）$x_1<x_2,y_1<y_2$；　　（D）$x_1<x_2,y_1>y_2$.

（2）二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充要条件是（　　）.

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$；

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$；

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$；

（D）$\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

（3）设函数 $z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）.

（A）x；　　（B）z；　　（C）$-x$；　　（D）$-z$.

（4）设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0$，$f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　　）.

（A）$f''(0)<0,g''(0)>0$；　　（B）$f''(0)<0,g''(0)<0$；

（C）$f''(0)>0,g''(0)>0$；　　（D）$f''(0)>0,g''(0)<0$.

（5）设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得；

（B）$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得；

（C）$u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值都在 D 的边界上取得；

（D）$u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值都在 D 的边界上取得.

（6）若 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处（　　）.

（A）极限存在但不一定连续；

（B）极限存在且连续；

（C）沿任意方向的方向导数存在；

（D）极限不一定存在，也不一定连续.

8.3.2　填空题

（1）【2006 年北京市竞赛题】设函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy}\ (xy\neq 0)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)-\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=$________.

（2）【2009 年北京市竞赛题】设 $z=x^2\mathrm{e}^y+(x-1)\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\left.\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{(1,0)}=$________.

（3）【2006 年北京市竞赛】已知 $z(x,y)$ 是由 $\sin(xyz)-\dfrac{1}{z-xy}=-1$ 所确定的隐函数，则 $z_x'(0,1)=$________.

（4）设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________.

（5）【2013 年北京市竞赛题】 若方程 $\Phi(x,y,z)=0$ 可以确定隐函数 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$，那么乘积 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

（6）【2010 年北京市竞赛题】已知方程 $u+\mathrm{e}^u=xy$ 确定了隐函数 $u=u(x,y)$，则在点 $x=y=1$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$________.

（7）【2009 年全国竞赛题】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^{y}\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

（8）【2012 年北京市竞赛题】 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $y=xf(z)+\phi(y,z)$ 所确定，其中 f、ϕ 分别具有连续的导数和偏导数，且 $xf'(z)+\phi_z'(y,z)\neq 0$．则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

（9）【2006 年北京市竞赛题】当 $u>0$ 时，$f(u)$ 具有一阶连续导数，且 $f(1)=0$，二元函数 $z=f(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y)$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$，则 $f(u)=$________.

8.3.3　证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$．

8.3.4　判断当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 的极限是否存在.

8.3.5　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$．

8.3.6　【2010 年全国竞赛预赛】 设函数 $f(t)$ 有二阶连续的导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$．

8.3.7　设 $u=f(x^2,y,z)$，而 $z=z(x,y)$ 由 $\phi(x^2+y^2,\mathrm{e}^y,z)=0$ 确定，且 $y=y(x)$ 由 $y=g(y)+\int_y^x p(t)\,\mathrm{d}t$ 确定，f,ϕ,g 均可微，$p(t)$ 连续，且 $1-g'(y)+p(y)\neq 0$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\neq 0$，试求 $\mathrm{d}u$．

8.3.8　【2013 年北京市竞赛题】求函数 $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2),\quad x,y>0$ 的极值.

8.3.9　求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

8.3.10　求曲线 $x^3-xy+y^3=1\,(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

8.4　深化训练详解

8.3.1　（1）D;　（2）C;　（3）B;　（4）A;

（5）A;　**提示**：内部驻点处 $AC-B^2<0$，不是极值点，从而不取最值.

（6）D.

8.3.2　（1）-1；　**提示**　$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)=0,\ \lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=1$．

（2）3;　（3）0;　（4）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$；

（5）-1；**提示**　由隐函数求导公式，得

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\Phi_y'}{\Phi_x'},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\Phi_z'}{\Phi_y'},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\Phi_x'}{\Phi_z'},$$

所以

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1\,.$$

（6）$\frac{3}{8}$；　（7）$-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$；　（8）$\frac{1-f-\phi'_y}{xf'+\phi'_z}$；　（9）$\ln u$.

8.3.3　**提示** 无穷小乘以有界变量.

8.3.4　$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^3}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2}$，所以原极限不存在.

8.3.5　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\left[(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right]=0$.

8.3.6　由题意

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性有

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right).$$

8.3.7　根据微分形式的不变性，有

$$\mathrm{d}u=f_1'\cdot 2x\mathrm{d}x+f_2'\cdot\mathrm{d}y+f_3'\cdot\mathrm{d}z .$$

对 $\phi(x^2+y^2,\mathrm{e}^y,z)=0$ 两边求微分，得

$$\phi_1'\cdot(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)+\phi_2'\cdot\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y+\phi_3'\cdot\mathrm{d}z=0,$$

所以

$$\mathrm{d}z=-\frac{\phi_1'}{\phi_3'}\cdot(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)-\frac{\phi_2'}{\phi_3'}\cdot\mathrm{e}^y\mathrm{d}y .$$

对 $y=g(y)+\int_y^x p(t)\,\mathrm{d}t$ 两边求微分，得

$$\mathrm{d}y=g'(y)\mathrm{d}y+p(x)\mathrm{d}x-p(y)\mathrm{d}y,$$

所以

$$\mathrm{d}y=\frac{p(x)}{1-g'(y)+p(y)}\mathrm{d}x,$$

代入得

$$\mathrm{d}u=2xf_1'\mathrm{d}x+f_2'\frac{p(x)}{1-g'(y)+p(y)}\mathrm{d}x$$
$$+f_3'\left[-\frac{\phi_1'}{\phi_3'}\cdot\left(2x\mathrm{d}x+2y\frac{p(x)}{1-g'(y)+p(y)}\mathrm{d}x\right)-\frac{\phi_2'}{\phi_3'}\cdot\mathrm{e}^y\frac{p(x)}{1-g'(y)+p(y)}\mathrm{d}x\right].$$

8.3.8　极小值 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$，**提示** 求驻点，再用 $AC-B^2$ 判断.

8.3.9　构造拉格朗日函数

$$\mathrm{L}(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4),$$

令

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ L'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ L'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ L'_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases},$$

解方程组得 $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2)$，$(x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8)$．由实际意义，可得所求的最大值为 $u(-2, -2, 8) = 72$，最小值为 $u(1, 1, 2) = 6$．

8.3.10　即求函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在约束条件 $x^3 - xy + y^3 = 1\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 下的最值.

构造拉格朗日函数 $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1)$．令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(3x^2 - y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(3y^2 - x) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \end{cases},$$

解得唯一驻点 $M_1(1, 1)$．再考虑边界点 $M_2(0, 1)$，$M_3(1, 0)$．而

$$f(1, 1) = \sqrt{2}，\quad f(0, 1) = 1，\quad f(1, 0) = 1，$$

比较可得，所求最长距离为 $f(1, 1) = \sqrt{2}$，最短距离为 $f(0, 1) = f(1, 0) = 1$．

第 9 章　多元函数积分学

9.1　知 识 要 点

本章内容主要包括二重积分的概念与性质、二重积分的计算方法、二重积分的应用、三重积分概念与计算等.

9.1.1　二重积分的概念

函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的二重积分是指下述特殊和式的极限

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 为分割闭区域 D 为 n 个子区域 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 时子区域 σ_i 的面积，任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\sigma_i$，$\lambda$ 为各子区域 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中最大的直径.

注　$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 与积分变量的记号无关.

几何意义　若 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，且 $f(x,y)\geqslant 0$，则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 在几何上表示以区域 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

定理　若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

9.1.2　二重积分的性质

设 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在区域 D 上均可积，则有以下性质.

性质 1　（线性运算性质）设 α,β 为常数，则

$$\iint_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\beta\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

性质 2　（积分区域的可加性）如果闭区域 D 被曲线分为两个没有公共内点的闭子区域 D_1 与 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

性质 3　$\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$，其中 σ 为 D 的面积.

性质 4　如果在闭区域 D 上，有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

特别地，有

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma .$$

性质 5　（估值定理）设 M, m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 为 D 的面积，则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma .$$

性质 6　（中值定理）设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma .$$

几何意义　在区域 D 上以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积，等于以区域 D 内某一点 (ξ,η) 的函数值 $f(\xi,\eta)$ 为高的平顶柱体的体积. $\dfrac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 称为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的**平均值**（**积分均值**）.

9.1.3　直角坐标系下二重积分的计算

在直角坐标系中，二重积分的面积元素 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，于是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y .$$

（1）若积分区域 D 可以表示为：$a \leqslant x \leqslant b$，$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y .$$

（2）若积分区域 D 可以表示为：$c \leqslant y \leqslant d$，$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x .$$

9.1.4　极坐标系下二重积分的计算

在极坐标系中，面积元素 $\mathrm{d}\sigma = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta ,$$

根据区域特点化为二次积分进行计算.

（1）如果极点 O 在积分区域 D 的外部，且 D：$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r .$$

（2）如果极点 O 在积分区域 D 的边界，且 D：$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r .$$

（3）如果极点 O 在积分区域 D 的内部，且 D： $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant r(\theta)$ ，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r .$$

9.1.5　二重积分的对称性原理

（1）若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & 若 f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & 若 f(x,-y)=f(x,y)\end{cases},$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴上方区域，即 $D_1=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, y\geqslant 0\}$.

（2）若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & 若 f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & 若 f(-x,y)=f(x,y)\end{cases},$$

其中 D_1 为 D 在 y 轴右侧区域，即 $D_1=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, x\geqslant 0\}$.

（3）若 D 关于原点对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & 若 f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & 若 f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases},$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴上方区域，即 $D_1=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, y\geqslant 0\}$.

（4）若区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

1）（轮换对称性）

$$\iint\limits_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D [f(x,y)+f(y,x)]\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

2） $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & 若 f(y,x)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & 若 f(y,x)=f(x,y)\end{cases},$

其中 D_1 为 D 位于直线 $y=x$ 某一侧的区域.

*9.1.6　二重积分的换元公式

设 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上的闭区域 D 上连续，变换 $T: x=x(u,v), y=y(u,v)$ 将 uov 平面上的有界闭区域 D' 一一对应地变为 xoy 平面上的闭区域 D ，且满足：

（1） $x(u,v), y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数；

（2）在 D' 上雅可比行列式 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$，则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)\,|\,J(u,v)\,|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

注　当 $J(u,v)$ 仅在 D' 内个别点或某条曲线上为零时，二重积分的换元公式仍成立.

*9.1.7　三重积分的概念

函数 $f(x,y,z)$ 在三维有界闭域 Ω 上的三重积分是指下述和式的极限：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i\,,$$

其中 ΔV_i 是分割闭域 Ω 为 n 个子域 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 时子域 V_i 的体积，任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in V_i$，$\lambda$ 为各子域 $V_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的最大直径.

若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积.

*9.1.8　三重积分的计算

1．投影法（先一后二法）（以先对变量 z 积分为例）

设积分区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\right\}$，其中 D_{xy} 为 Ω 在 xoy 平面上的投影，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,.$$

注　（1）若积分区域

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,a\leqslant x\leqslant b,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\right\},$$

则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,.$$

（2）特殊地，若 $f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$（即被积函数 $f(x,y,z)$ 可分离变量）且积分区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d,e\leqslant z\leqslant h\right\}$（即 Ω 为矩形区域），则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y\int_e^h f_3(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

即三重积分可化为三个定积分.

2．截面法（先二后一法）（以最后变量 z 积分为例）

设积分区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,(x,y)\in D_z,c_1\leqslant z\leqslant c_2\right\}$，其中 D_z 为纵坐标恒为 z 的平面与积分区域 Ω 的截面，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

*9.1.9 三重积分的换元法

设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续，变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\y=y(u,v,w)\\z=z(u,v,w)\end{cases}$ 将 uvw 空间的 Ω' 一一对应地变为 xyz 空间的 Ω，且

（1） $x(u,v,w)$，$y=y(u,v,w)$，$z=z(u,v,w)$ 在 Ω' 上具有一阶连续偏导数，

（2）在 Ω' 上雅可比行列式 $J(u,v,w)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}&\dfrac{\partial x}{\partial w}\\\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}&\dfrac{\partial y}{\partial w}\\\dfrac{\partial z}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial v}&\dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'} f(x(u.v,w),y(u.v,w),z(u.v,w))\left|J(u,v,w)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

常用的坐标变换有以下两种：

1）柱坐标变换 $T:\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases}$，其中 $\begin{cases}0\leqslant r<+\infty\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\-\infty<z<+\infty\end{cases}$，此时 $J(r,\theta,z)=r$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,.$$

2）球坐标变换 $T:\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\y=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$，其中 $\begin{cases}0\leqslant r<+\infty\\0\leqslant\varphi\leqslant\pi\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$，此时 $J(r,\varphi,\theta)=r^2\sin\varphi$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,.$$

*9.1.10 三重积分的对称性原理

（1）若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积，有界闭域 Ω 关于坐标平面 xoy（即 $z=0$）对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\begin{cases}0 & 若f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\\2\iiint\limits_{\Omega_上} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v & 若f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases},$$

其中 $\Omega_上$ 为 Ω 在 xoy 平面上方部分，即 $\Omega\cap\{z\geqslant 0\}$.

（2）若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积，有界闭域 Ω 关于坐标平面 yoz（即 $x=0$）对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}0 & 若f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\\2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v & 若f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases},$$

其中 Ω_1 为 Ω 中 $x\geqslant 0$ 的部分，即 $\Omega\cap\{x\geqslant 0\}$.

（3）若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积，有界闭域 Ω 关于坐标平面 zox （即 $y=0$ ）对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\begin{cases}0 & 若 f(x,-y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v & 若 f(x,-y,z)=f(x,y,z)\end{cases},$$

其中 Ω_1 为 Ω 中 $y\geqslant 0$ 的部分，即 $\Omega\cap\{y\geqslant 0\}$.

9.2　典型例题分析

9.2.1　题型一、二重积分的概念与性质问题

例 9.2.1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2n^4}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}i^2\sin\dfrac{j\pi}{2n}$.

解　由函数 $f(x,y)=x^2\sin y$ 在区域 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 上连续，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i^2\sin\frac{j\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2\sin\frac{j\pi}{2n}\right]\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$=\iint\limits_{D}x^2\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

例 9.2.2　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{2n}\dfrac{2}{n^2}\left[\dfrac{2i+j}{n}\right]$，这里 $[x]$ 是不超过 $[x]$ 的最大整数.

解　如图 9.1 所示，函数 $f(x,y)=[x+y]$ 在矩形区域 $D:0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2$ 上分段连续，从而 $f(x,y)$ 在 D 上可积，并且积分值与区域 D 的分法及 (ξ_i,η_i) 的选取无关．不妨将区域 D 的 x 轴上区间 n 等分，y 轴上区间 $2n$ 等分，则各小矩形的面积为 $\Delta\sigma_i=\dfrac{2}{n^2}$，取 $\Delta\sigma_i$ 的右上顶点 $\left(\dfrac{2i}{n},\dfrac{j}{n}\right)$ 的函数值，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{2}{n^2}\left[\frac{2i+j}{n}\right]=\iint\limits_{D}[x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

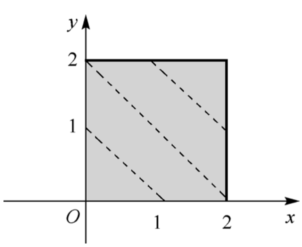

图 9.1

又因为

$$f(x,y)=[x+y]=\begin{cases}0 & 0\leqslant x+y<1\\ 1 & 1\leqslant x+y<2\\ 2 & 2\leqslant x+y<3\\ 3 & 3\leqslant x+y<4\\ 4 & x+y=4\end{cases},$$

所以

$$\iint\limits_{D}[x+y]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{2}+2\times\frac{3}{2}+3\times\frac{1}{2}=6\,.$$

例 9.2.3　设 $D: x^2+y^2\leqslant 1$，证明：$\dfrac{61}{165}\pi\leqslant\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\dfrac{2}{5}\pi$.

证　利用极坐标，有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_0^1\rho\sin(\rho^3)\,\mathrm{d}\rho .$$

因对任意的非负实数 t 有 $t-\dfrac{t^3}{3!}\leqslant\sin t\leqslant t$，于是

$$\rho^3-\frac{\rho^9}{3!}\leqslant\sin(\rho^3)\leqslant\rho^3 ,$$

所以

$$\int_0^1\rho\sin(\rho^3)\,\mathrm{d}\rho\leqslant\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{5} ,$$

$$\int_0^1\rho\sin(\rho^3)\,\mathrm{d}\rho\geqslant\int_0^1\left(\rho^4-\frac{\rho^{10}}{6}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{61}{330} ,$$

即有

$$\frac{61}{165}\pi\leqslant\iint\limits_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{2}{5}\pi .$$

例 9.2.4　若 $g(x)$ 的导数连续，$g(0)=0, g'(0)=1$，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，求 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{g(r^2)}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解　由积分中值定理得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\cdot\pi r^2,\quad (\xi,\eta)\in\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\} ,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{g(r^2)}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\lim_{r\to 0^+}\frac{f(\xi,\eta)\pi r^2}{g(r^2)}=\pi\lim_{r\to 0^+}\frac{f(\xi,\eta)}{\dfrac{g(r^2)}{r^2}}\\&=\pi\frac{f(0,0)}{g'(0)}=\pi f(0,0) .\end{aligned}$$

9.2.2　题型二、二重积分的基本计算方法

例 9.2.5　计算积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

解　交换积分次序，得

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} .$$

例 9.2.6　计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\mathrm{d}y}{1+(\tan y^2)^{\sqrt{2}}}$.

解　交换积分次序，得

$$I=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\mathrm{d}y\int_0^{y^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan y^2)^{\sqrt{2}}}=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{2y}{1+(\tan y^2)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{u=y^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan u)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot u)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan u)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan u)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}u,$$

所以

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}.$$

例 9.2.7　设 D 为由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$　$(a>0)$ 与直线 $y=-x$ 围成的区域，求积分 $I=\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

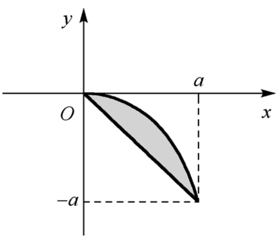

图 9.2

解　如图 9.2 所示，选取极坐标系计算，$D:-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0$, $0\leqslant r\leqslant -2a\sin\theta$，所以

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r\;\underline{\underline{r=2a\sin t}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)a^2.$$

注　在计算 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r$ 时，内层的定积分是典型的三角换元的情形，需要注意变元后对应上下限的确定.

例 9.2.8　计算 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，其中

$$D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant r\leqslant\sec\theta\right\}.$$

解　在直角坐标系下，$D=\left\{(x,y)\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\right\}$，因此

$$I=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\,r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{3}\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\qquad\left(x=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

注　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$ 可以降幂求解，也可以直接用瓦里斯（Wallis）公式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n\text{为偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为奇数}\end{cases}.$$

9.2.3　题型三、分段函数的二重积分

例 9.2.9　设 $f(x)=\begin{cases}a & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $(a>0)$，D 为全平面，求：

（1）$\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；（2）$\iint\limits_D f(x)f(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　（1）原式 $=\int_0^2 a\mathrm{d}x\int_0^2 a\,\mathrm{d}y=4a^2$；

（2）积分区域为 $0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y-x\leqslant 2$，所以原式 $=\iint\limits_D a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\cdot S_D=4a^2$.

例 9.2.10　【2011 年全国竞赛预赛题】求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解　如图 9.3 所示，设

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant 2\right\},\quad D_2=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{x}\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\right\},$$

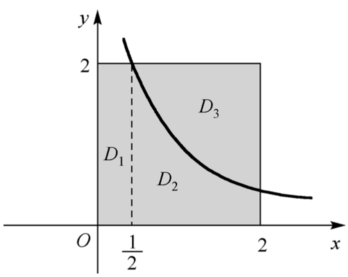

图 9.3

则

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}y=1+2\ln 2,$$

$$\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2\mathrm{d}y=3-2\ln 2,$$

所以

$$\iint\limits_D\operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2-4\ln 2.$$

例 9.2.11　【2008 年北京市竞赛题】计算 $\int_0^1\int_0^1[2x+2y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

解　积分区域分为四部分，

$$D_1:0\leqslant x+y<\frac{1}{2},\quad D_2:\frac{1}{2}\leqslant x+y<1,$$

$$D_3:1\leqslant x+y<\frac{3}{2},\quad D_4:\frac{3}{2}\leqslant x+y<2 .$$

由 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma=\sigma$ 得，

$$\int_0^1\int_0^1[2x+2y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2} .$$

注　也可以化为二次积分去做，但过程比较麻烦.

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1[2x+2y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}-x}^{1-x}1\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}1\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\frac{3}{2}-x}2\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{\frac{3}{2}-x}^{1}3\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

例 9.2.12　计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,\,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\right\}$.

解　设

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\right\},\quad D_2=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\right\},$$

则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,\,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{\max\{x^2,\,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{\max\{x^2,\,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}-1.\end{aligned}$$

9.2.4　题型四、利用对称性原理计算二重积分

例 9.2.13　【2013 年北京市竞赛题】 计算二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(4-5\sin x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　由对称性，得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}4\mathrm{d}x\mathrm{d}y-5\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=4\pi a^2+0+0=4\pi a^2.\end{aligned}$$

例 9.2.14　【2013 年北京市竞赛题】设 D 由曲线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$ 、$y=-x^2\ (-1\leqslant x\leqslant 0)$ 、 $y=1$ 及 $x=-1$ 所围成的平面区域，试求二重积分

$$I=\iint_D x\left[1+\ln(y+\sqrt{1+y^2})\sin(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

分析　被积函数 $f(x,y)=x+g(x,y)$，其中

$$g(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\ \sin(x^2+y^2)$$

关于 x 是奇函数，关于 y 也是奇函数.因此本题可以通过对积分区域进行分割，利用二重积分的对称性进行求解.

解　如图 9.4 所示，引入辅助线 $y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 0)$，将积分区域 D 分为两个区域：D_1 和 D_2，其中

$$D_1:\begin{cases}-\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}-x^2\leqslant y\leqslant x^2\\ -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases},$$

积分区域 D_1 关于 y 轴对称，积分区域 D_2 关于 x 轴对称，因此

$$\begin{aligned}I&=\iint_{D_1}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\ \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\iint_{D_2}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\ \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=0+\iint_{D_2}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0+0=2\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 9.2.15　【2015 年考研题】计算二重积分 $\iint_D x(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2,\ y\geqslant x^2\}$.

解　如图 9.5 所示，由于积分区域关于 y 轴对称，所以

$$\begin{aligned}\iint_D x(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D(x^2+xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\,\mathrm{d}y=2\int_0^1x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=\!=\!=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}x-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

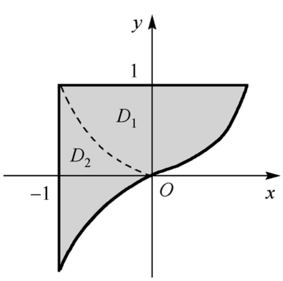

图 9.4

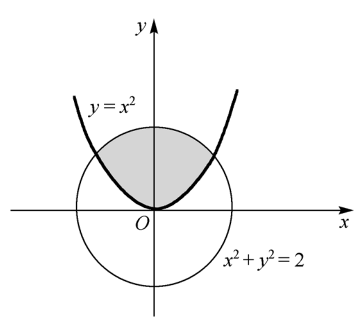

图 9.5

例 9.2.16　求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$为由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域.

解　如图 9.6 所示，由对称性得$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，令$D_1$：$x^2+y^2\leqslant 4$，$D_2$：$(x+1)^2+y^2\leqslant 1$，则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r\\&=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}=\frac{16}{9}(3\pi-2),\end{aligned}$$

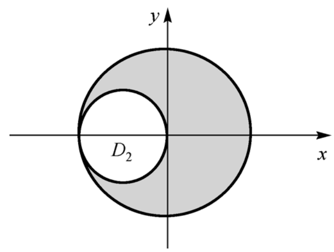

图 9.6

所以

$$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

例 9.2.17　设平面区域$D=\{(x,y)\,|\,x^3\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$f(x)$为$[-a,a]$ $(a\geqslant 1)$上的连续函数，求$I=\iint\limits_D 2y\left[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

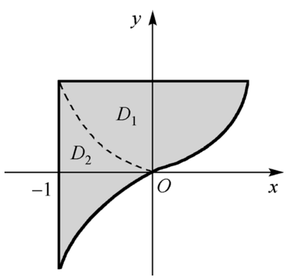

图 9.7

解　如图 9.7 所示，作辅助线$y=-x^3$，将D分成D_1和D_2两部分，其中D_1关于x轴对称，D_2关于y轴对称，注意到被积函数

$$g(x,y)=2xy\left[f(x)+f(-x)\right]+2y\left[f(x)-f(-x)\right]$$

既是关于x的奇函数，也是关于y的奇函数，即满足

$$g(-x,y)=-g(x,y),\ g(x,-y)=-g(x,y),$$

由对称性定理得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D 2y\left[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}2y\left[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}2y\left[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=0+0=0.\end{aligned}$$

例 9.2.18　计算积分$I=\iint\limits_D(|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由曲线$xy=2$、直线$y=x-1$和$y=x+1$所围成的区域.

解　D关于直线$y=x$，所以

$$I=\iint\limits_D|x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D|y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_D|x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由于$f(-x,-y)=f(x,y)=|x|$，得

$$I=4\iint\limits_{D_1}|x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_1 是积分区域在第一象限和第四象限中的部分，所以

$$I=4\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x-1}^{x+1} x\,\mathrm{d}y+4\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{x-1}^{\frac{2}{x}} x\,\mathrm{d}y=4+4\times\frac{7}{6}=\frac{26}{3}.$$

例 9.2.19　计算积分 $I=\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2\leqslant R^2$.

解　利用轮换对称性得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).\end{aligned}$$

例 9.2.20　【2009 年北京市竞赛题】计算 $\lim\limits_{a\to+\infty}\iint\limits_D\min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为正方形区域 $[-a,a]\times[-a,a]$.

解　用直线 $y=x$ 将 D 划分为左上部分 D_1 和右下部分 D_2，在 D_1 上 $y\geqslant x$，在 D_2 上 $y\leqslant x$，且 D_1 和 D_2 关于直线 $y=x$ 对称，所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=2\iint\limits_{D_1}x\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{-a}^{y}x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-y^2}(\mathrm{e}^{-a^2}-\mathrm{e}^{-y^2})\,\mathrm{d}y\\&=2\mathrm{e}^{-a^2}\int_0^a\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y-2\int_0^a\mathrm{e}^{-2y^2}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

由

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

得

$$\lim_{a\to+\infty}2\mathrm{e}^{-a^2}\int_0^a\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=0,$$

$$\lim_{a\to+\infty}2\int_0^a\mathrm{e}^{-2y^2}\,\mathrm{d}y=\lim_{a\to+\infty}\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

所以

$$\lim_{a\to+\infty}\iint_D \min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

例 9.2.21　【2014 年考研题】 设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算 $\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

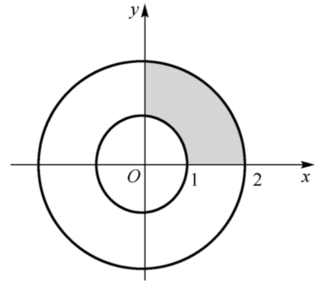

图 9.8

解　如图 9.8 所示，D 关于 $y=x$ 对称，由轮换对称性，得

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\sin\pi r\cdot r\,\mathrm{d}r\\&=-\frac{1}{4}\int_1^2 r\,\mathrm{d}\cos\pi r=-\frac{1}{4}\left[r\cos\pi r\Big|_1^2-\int_1^2\cos\pi r\,\mathrm{d}r\right]=-\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

9.2.5　题型五、二重积分的换元积分法

例 9.2.22　计算 $\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由双曲线 $xy=1, xy=2$ 和直线 $y=x, y=4x$ 围成的第一象限内的闭区域.

解　设 $u=xy, v=\frac{y}{x}$，则 $x=\sqrt{\frac{u}{v}},\quad y=\sqrt{uv}$，边界分别变为 $u=1,u=2,v=1,v=4$，从而 D 变为 $D':1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4$，且

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v},$$

所以

$$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\,\mathrm{d}u\cdot\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\frac{7}{3}\ln 2.$$

例 9.2.23　【2009 年全国竞赛题】计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $x+y=1$ 与两坐标轴围成的三角形区域.

解　令 $u=x+y, v=x$，则 $x=v,\quad y=u-v$，

$$J=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\,,$$

三条边界分别变为 $u=1, v=0, u=v$，从而积分区域 $D':0\leqslant u\leqslant 1,\quad 0\leqslant v\leqslant u$，所以

$$原式=\iint\limits_{D'}\frac{u\ln\frac{u}{v}}{\sqrt{1-u}}\cdot 1\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\int_0^u\ln\frac{u}{v}\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u}}\left[u\ln u-(v\ln v-v)\Big|_{0^+}^{u}\right]\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{\sqrt{1-u}=t}2\int_0^1(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t=\frac{16}{15}.$$

注 本题中的积分是广义积分，瑕点处应求极限.

9.2.6 题型六、二重积分的应用问题

例 9.2.24 【1988 年北京市竞赛题】求由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=2\text{-}\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的空间立体的体积 V.

解 联立 $z=x^2+y^2$，$z=2\text{-}\sqrt{x^2+y^2}$，解得 $z_1=1$，$z_2=4$（舍去），所围部分在 xoy 平面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant 1$，于是

$$V=\iint\limits_D[2-\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2-\rho-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{5\pi}{6}.$$

例 9.2.25 【2015 年全国竞赛预赛题】曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为__________.

解 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面为

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0\,,$$

即

$$z=2x-2y-1\,.$$

联立 $z=x^2+y^2$，$z=2x-2y-1$，得所围区域的投影为 $\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1\}$.

所求体积为

$$V=\iint\limits_D[2x-2y-1-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D[1-(x-1)^2-(y+1)^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

令 $x-1=r\cos\theta,\ y+1=r\sin\theta$，则

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\,.$$

例 9.2.26 求由曲面 $y=x^2$，$x=y^2$，$z=12-x^2+y$ 和平面 $z=0$ 所围成的立体体积 V.

解　$V=\iint\limits_D(12-x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(12-x^2+y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\left(12\sqrt{x}-x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x-12x^2+\frac{1}{2}x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(8x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{4}x^2-4x^3+\frac{1}{10}x^5\right)\Bigg|_0^1=4\frac{9}{140}.$$

例 9.2.27　求由曲面 $z=xy,x+y+z=1,z=0$ 所围成的立体体积 V .

解　由题意，有

$$V=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}xy\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x(1-x)^2}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{17}{12}-2\ln 2.$$

9.2.7　题型七、二重积分的相关证明

例 9.2.28　【2010 年北京市竞赛题】 设闭区域 D 为 $|x|+|y|\leqslant 1$， $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明：$\iint\limits_D f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$.

证　由题意

$$\iint\limits_D f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}f(x+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-1}^{1+2x}f(u)\mathrm{d}u+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-1}^0\mathrm{d}u\int_{\frac{u-1}{2}}^{\frac{u+1}{2}}f(u)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

注　欲证等式成立，考虑将左边二重积分化为二次积分，再想办法对其中一个变量积分，得到定积分.

例 9.2.29　【1996 年北京市竞赛题】 设 $f(x)$ 为连续的偶函数，证明

$$\iint\limits_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)\mathrm{d}u,$$

其中 D 为正方形 $|x|\leqslant a,|y|\leqslant a\quad(a>0)$.

证　$\iint\limits_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^a\mathrm{d}x\int_{-a}^a f(x-y)\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{u=x-y}\int_{-a}^a\mathrm{d}x\int_{x-a}^{x+a}f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-2a}^0\mathrm{d}u\int_{-a}^{u+a}f(u)\mathrm{d}x+\int_0^{2a}\mathrm{d}u\int_{u-a}^a f(u)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-2a}^0 f(u)(u+2a)\mathrm{d}u+\int_0^{2a}f(u)(2a-u)\mathrm{d}u,$$

由 $f(x)$ 为连续的偶函数，得

$$\int_{-2a}^{0} f(u)(u+2a)\mathrm{d}u \xlongequal{u=-v} \int_{0}^{2a} f(v)(2a-v)\mathrm{d}v = \int_{0}^{2a} f(u)(2a-u)\mathrm{d}u,$$

故

$$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)\mathrm{d}u.$$

例 9.2.30　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

证　由于 $f^2(x)+f^2(y)\geqslant 2f(x)f(y)$，则

$$\begin{aligned}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f(x)f(y)\mathrm{d}y,\\ &\leqslant \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{2}[f^2(x)+f^2(y)]\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}(b-a)\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right]\\ &= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注　第一个等式是将定积分问题转化为二重积分的典型方法，先将定积分平方，再改变其中一个定积分的积分变量的记号，转化成二重积分.

例 9.2.31　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 1$.

证　由于

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，关于 $y=x$ 对称．由对称性，得

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\iint_D \left[\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\mathrm{e}^{f(y)-f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{1}{2}\iint_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

例 9.2.32　设 $u(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $u(x)=1+\lambda\int_x^1 u(y)u(y-x)\mathrm{d}y$，试证：$\lambda\leqslant\frac{1}{2}$.

证　记 $a=\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x$，对已知等式在 $[0,1]$ 上积分得

$$a = 1+\lambda\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 u(y)u(y-x)\mathrm{d}y = 1+\lambda\int_0^1 u(y)\mathrm{d}y\int_0^y u(y-x)\mathrm{d}x \quad （积分换序）$$

$$\xlongequal{t=y-x} 1+\lambda\int_0^1 u(y)\mathrm{d}y\int_0^y u(t)\mathrm{d}t = 1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 u(y)\mathrm{d}y\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t \quad （对称性）$$

$$= 1+\frac{\lambda}{2}a^2,$$

方程$\dfrac{\lambda}{2}x^2-x+1=0$有实根，则判别式$1-2\lambda\geqslant 0$，即$\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$.

例 9.2.33　设$f(x,y)$在单位圆域有连续的偏导数，且在边界上取值为零，求证：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_D \frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi f(0,0),$$

其中D为圆环域：$\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

证　令$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,$$

即

$$\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

由已知，当$\rho=1$时，$f(\cos\theta,\sin\theta)=0$，则

$$\begin{aligned}I&=\iint_D\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{\partial f}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=0-2\pi f(\varepsilon\cos\theta^*,\varepsilon\sin\theta^*)\quad（积分中值定理，\theta^*\in(0,2\pi)）.\end{aligned}$$

由$f(x,y)$在单位圆域有连续的偏导数，得$f(x,y)$在单位圆域上可微，进而连续，因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_D \frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi f(0,0).$$

9.2.8　题型七、二重积分的综合问题

例 9.2.34　计算极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^6}\int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t\sin(xy)^2\mathrm{d}y$.

解　交换积分次序，得

$$\int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t\sin(xy)^2\mathrm{d}y=\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^y\sin(xy)^2\mathrm{d}x,$$

应用洛必达法则，得

$$原式=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t\sin(tx)^2\mathrm{d}x}{6t^5}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{t^2}\sin u^2\mathrm{d}u}{6t^6}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2t\sin t^4}{36t^5}=\frac{1}{18}.$$

例 9.2.35　设函数$f(x)$连续，且$f(0)=1$，令

$$F(t)=\iint_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (t\geqslant 0)，求 F''(0).$$

解　选取极坐标系，

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)\,r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t f(r^2)\,r\,\mathrm{d}r,$$

所以

$$F'(t)=2\pi t\,f(t^2),$$

$$F''(0)=\lim_{t\to0}\frac{F'(t)-F'(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\pi t\,f(t^2)}{t}=\lim_{t\to0}2\pi f(t^2)=2\pi .$$

例 9.2.36　设函数 $f(x)$ 连续，且满足

$$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+t^4,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

解　显然 $f(x)$ 为偶函数，当 $t\geqslant0$ 时，

$$f(t)=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r)r^3\,\mathrm{d}r+t^4=4\pi\int_0^t f(r)r^3\,\mathrm{d}r+t^4 .$$

令 $t=0$，得 $f(0)=0$．两边对 t 求导，得

$$f'(t)=4\pi f(t)t^3+4t^3, \tag{*}$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t)+\dfrac{1}{\pi}}=4\pi t^3\,\mathrm{d}t,$$

解得

$$f(t)+\frac{1}{\pi}=c\,\mathrm{e}^{\pi t^4},$$

代入 $f(0)=0$，得 $c=\dfrac{1}{\pi}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi x^4}-1)$.

注　（*）式中的微分方程也可以用一阶线性微分方程求解.

例 9.2.37　设 $f(x,y)$ 连续，且

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}+xy\iint\limits_{D_1}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D_1:0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1 .$$

计算积分 $\iint\limits_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D_2:x>0,y>0,x^2+y^2\leqslant1$.

解　令 $\iint\limits_{D_1}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A$，则

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}+Axy,\quad xyf(x,y)=xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}+Ax^2y^2 .$$

两边在区域 D_1 上积分得

$$A=\iint_{D_1}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1}xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+A\iint_{D_1}x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\left(\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2+A\left(\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{4}(\mathrm{e}-1)^2+\frac{1}{9}A,$$

解得

$$A=\frac{9}{32}(\mathrm{e}-1)^2,$$

所以

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}+\frac{9}{32}(\mathrm{e}-1)^2xy.$$

利用极坐标，在 D_2 上作积分，有

$$\iint_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{e}^{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho+\frac{9}{32}(\mathrm{e}-1)^2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}-1)+\frac{9}{256}(\mathrm{e}-1)^2.$$

例 9.2.38　【2011 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=A$，求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

解　交换积分次序，可得

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

所以

$$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y=A^2,$$

因此，

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2.$$

解法 2　由于

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left[f(x)\cdot\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

注意到

$$\left[\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right]'=-f(x),$$

有

$$\text{原式}=-\int_0^1\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\left[\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right]=-\frac{1}{2}\left[\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right]^2\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right]^2=\frac{1}{2}A^2.$$

例 9.2.39　设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$ 上连续，且恒取正值，试求

$$\lim_{n\to\infty}\iint_D \sin x\,[f(x,y)]^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解　由 $f(x,y)$ 在 D 上连续，得 $f(x,y)$ 在 D 上可以取到最大值和最小值，分别设为 M 和 m．注意 $\sin x$ 在 D 上非负，从而

$$m^{\frac{1}{n}}\sin x\leqslant\sin x\,[f(x,y)]^{\frac{1}{n}}\leqslant M^{\frac{1}{n}}\sin x,$$

故

$$m^{\frac{1}{n}}\iint_D\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\iint_D\sin x\,[f(x,y)]^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant M^{\frac{1}{n}}\iint_D\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

再由

$$\iint_D\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}y=2\pi,$$

得

$$m^{\frac{1}{n}}\cdot2\pi\leqslant\iint_D\sin x\,[f(x,y)]^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant M^{\frac{1}{n}}\cdot2\pi,$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}M^{\frac{1}{n}}=1$ 和夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\iint_D\sin x\,[f(x,y)]^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi.$$

例 9.2.40　设 $f(x,y)$ 定义在 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$ 上，$f(0,0)=0$，且 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}$．

解　交换积分次序，得

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u=-\int_0^x\left(\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u,$$

应用洛必达法则和积分中值定理，得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^x\left(\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}{\frac{x^4}{4}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi(x),x)\cdot x^2}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi(x),x)}{x}$$

其中 $0<\xi(x)<x^2$．由 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$ 及 $\xi(x)=o(x)$，得

$$f(\xi(x),x)=f(0,0)+f'_x(0,0)\xi(x)+f'_y(0,0)x+o\left(\sqrt{\xi^2(x)+x^2}\right)$$

$$=f'_y(0,0)x+o(x),$$

因此，

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{f'_y(0,0)x+o(x)}{x}=-f'_y(0,0).$$

例 9.2.41　已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xy\,f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解　化为先对 y 后对 x 的二次积分，得

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)$$

$$=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\left[f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

由 $f(x,1)=0$，得

$$f'_x(x,1)=\frac{\mathrm{d}f(x,1)}{\mathrm{d}x}=0,$$

所以

$$I=-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y)$$

$$=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=-\int_0^1 f(1,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a.$$

例 9.2.42　【2015 年全国竞赛预赛题】设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数，且 $f''^2_{xx}+2f''^2_{xy}+f''^2_{yy}\leqslant M$．若 $f(0,0)=0$， $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，证明

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

证　在点 $(0,0)$ 处展开 $f(x,y)$，得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$$

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y)\\&=\frac{1}{2}\left[x^2 f_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2 f_{yy}(\theta x,\theta y)\right],\end{aligned}$$

其中 $\theta\in(0,1)$．

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2}(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\cdot(f_{xx}(\theta x,\theta y),\sqrt{2}f_{xy}(\theta x,\theta y),f_{yy}(\theta x,\theta y))\\&=\frac{1}{2}(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\cdot(f_{xx}(\theta x,\theta y),\sqrt{2}f_{xy}(\theta x,\theta y),f_{yy}(\theta x,\theta y)),\end{aligned}$$

由内积不等式，得

$$\begin{aligned}|f(x,y)|&\leqslant\frac{1}{2}\left\|(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\right\|\cdot\left\|(f_{xx}(\theta x,\theta y),\sqrt{2}f_{xy}(\theta x,\theta y),f_{yy}(\theta x,\theta y))\right\|\\&\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{f_{xx}^{\ 2}(\theta x,\theta y)+2f_{xy}^{\ 2}(\theta x,\theta y)+f_{yy}^{\ 2}(\theta x,\theta y)}\\&\leqslant\frac{\sqrt{M}}{2}(x^2+y^2),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|&\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{M}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.\end{aligned}$$

*9.2.9　题型八、三重积分的性质与计算

例 9.2.43　设 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，证明：$\dfrac{4\sqrt[3]{2}}{3}\pi\leqslant\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}v\leqslant\dfrac{8}{3}\pi$．

证　设 $f(x,y,z)=x+2y-2z+5$，由 $f'_x=1\neq 0$， $f'_y=2\neq 0$， $f'_z=-2\neq 0$，得 f 在 Ω 内无驻点，最值在边界取得，用拉格朗日乘数法求解．设

$$F(x,y,z,\lambda)=x+2y-2z+5+\lambda(x^2+y^2+z^2-1),$$

令

$$F'_x=1+2\lambda x=0\,,\quad F'_y=2+2\lambda y=0\,,\quad F'_z=-2+2\lambda z=0\,,\quad F'_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0\,,$$

解得驻点为

$$P_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right),\quad P_2=\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

由 $f(P_1)=8$，$f(P_2)=2$，f 与 $\sqrt[3]{f}$ 有相同极值点，得 $\sqrt[3]{f(P_1)}=2$ 为 $\sqrt[3]{f}$ 在 Ω 上的最大值，$\sqrt[3]{f(P_2)}=\sqrt[3]{2}$ 为 $\sqrt[3]{f}$ 在 Ω 上的最小值，所以

$$\frac{4\sqrt[3]{2}}{3}\pi\leqslant\iiint_\Omega\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}v\leqslant\frac{8}{3}\pi\,.$$

例 9.2.44　设 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，求 $\iiint_\Omega\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v$.

解　由轮换对称性，x,y,z 轮换，积分值不变.

$$3I=\iiint_\Omega\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v+\iiint_\Omega\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v+\iiint_\Omega\left(\frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v,$$

$$I=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v\,.$$

用球面坐标系 $x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\theta$ 计算，

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\\&=\frac{4}{15}\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).\end{aligned}$$

例 9.2.45　【2016 年全国竞赛预赛题】某物体所在的空间区域为 $\Omega:x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$，密度函数为 $x^2+y^2+z^2$，求质量

$$M=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

解　由于 $\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 1$ 是一个椭球，它的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\,.$$

作变换

$$u=x-\frac{1}{2},\quad v=y-\frac{1}{2},\quad w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right),$$

将区域 Ω 变为单位球 $\Sigma:u^2+v^2+w^2\leqslant 1$，雅可比行列式为 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，故

$$M=\iiint_\Sigma\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

由对称性，一次项积分均为 0，所以

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Sigma}\left[\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)+\frac{3}{4}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Sigma}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w+\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

记

$$I=\iiint_{\Sigma}(u^2+v^2+w^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi,$$

由于 u^2,v^2,w^2 在 Σ 上积分相等，均为 $\frac{I}{3}$，故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)I+\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi.$$

注 最后一步也可以直接使用轮换对称性求解.

$$\iiint_{\Sigma}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$
$$=\frac{1}{3}\iiint_{\Sigma}\left[\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)+\left(v^2+w^2+\frac{u^2}{2}\right)+\left(w^2+u^2+\frac{v^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$
$$=\frac{1}{3}\iiint_{\Sigma}\left(1+1+\frac{1}{2}\right)(u^2+v^2+w^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\frac{5}{6}\iiint_{\Sigma}(u^2+v^2+w^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\frac{2}{3}\pi.$$

例 9.2.46 求 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 积分区域由 $x^2+y^2\leqslant z^2,\ 0\leqslant z\leqslant H$ 所围.

解 由 Ω 关于 xoz 面、 yoz 面对称，得

$$I=\iiint_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}y\,\mathrm{d}v=0.$$

所以

$$I=\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\int_0^H z\,\mathrm{d}z\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^H z\pi z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\pi H^4.$$

例 9.2.47 求 $I=\iiint_{\Omega}\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}v$，其中积分区域 Ω 由 $x=1,x=2,z=0,y=x,z=y$ 所围.

解 积分区域 Ω 在 xoy 平面上的投影 $D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant 2\}$，所以

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}v=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^y\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$
$$=\iint_D\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^x\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_0^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 9.2.48　求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中积分区域 Ω 由 $2(x^2+y^2)=z, z=4$ 所围.

解　Ω 在 xoy 平面上投影 $D: x^2+y^2\leqslant 2$，选取柱坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，则

$$\Omega'=\left\{(r,\theta,z)\middle|\, 2r^2\leqslant z\leqslant 4, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}.$$

所以

$$V=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega'}r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{2r^3}^{4}r^3\,\mathrm{d}z=\frac{8}{3}\pi.$$

例 9.2.49　求由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围体积.

解　取球坐标变换 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，则

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega'}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

解法 2　取柱坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，则

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r\,\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r(\sqrt{1-r^2}-r)\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

解法 3（利用二重积分）联立 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$，解得交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{1}{2}\\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$，所围部分在 xoy 平面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant\dfrac{1}{2}$，于是

$$\begin{aligned}V&=\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\sqrt{1-r^2}-r)r\,\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

例 9.2.50　求由 6 个平面 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3\end{cases}$ 所围平行六面体的体积，其中 $A=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq 0$，且 $a_i,b_i,c_i,h_i(i=1,2,3)$ 为常数.

解　作变换$\begin{cases} u=a_1x+b_1y+c_1z \\ v=a_2x+b_2y+c_2z \\ w=a_3x+b_3y+c_3z \end{cases}$，则边界为$u=\pm h_1, v=\pm h_2, w=\pm h_3$，且

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{1}{A},$$

所以

$$V=\iiint\limits_{\Omega}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{|A|}\iiint\limits_{\Omega}1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\frac{1}{|A|}\int_{-h_1}^{h_1}\mathrm{d}u\int_{-h_2}^{h_2}\mathrm{d}v\int_{-h_3}^{h_3}\mathrm{d}w=\frac{8}{|A|}h_1h_2h_3 .$$

例 9.2.51　设$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$，交换累次积分次序，写出先对$x$积分的累次积分.

解　$I=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}y\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}f(x,y,z)\mathrm{d}x$，

$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}z\int_0^{1-y}f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{d}z\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)\mathrm{d}x$.

例 9.2.52　设$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中$f(u)$可微，求$F'(t)$.

解　取球坐标变换$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$，则

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r,$$

所以

$$F'(t)=4\pi t^2f(t^2) .$$

9.3　深 化 训 练

9.3.1　单项选择题

（1）设$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_{\max\{|x|,|y|\}\leqslant 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则下列关系成立的是（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$；　　（B）$I_1<I_3<I_2$；

（C）$I_2<I_1<I_3$；　　（D）$I_2<I_3<I_1$.

（2）设$I_1=\iint\limits_{D}\frac{x+y}{4}\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_{D}\sqrt{\frac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_{D}\sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\right\}$，则下列关系成立的是（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$；　　（B）$I_3<I_2<I_1$；

（C）$I_3<I_1<I_2$；　　（D）$I_2<I_1<I_3$.

（3）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r=$（　　）.

（A）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；　（B）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；　（D）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

（4）【2015 年考研题】设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 为在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$（　　）.

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$；　（B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$；

（C）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$；　（D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

（5）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x$；　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（C）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$；　（D）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

9.3.2　填空题

（1）$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{|x|}^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=$________.

（2）【2012 年北京市竞赛题】$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2 y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y=$________.

（3）设平面区域 D 由直线 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴围成，则 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=$________ .

（4）【2012 年北京市竞赛题】$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________ .

（5）【2009 年北京市竞赛题】设 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\leqslant 1\right\}$，则积分 $\iint\limits_D(x+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

（6）设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=y^2+x\cdot\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 $D: x^2+y^2\leqslant a^2$ ，则 $f(x,y)=$________.

（7）$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(\sin^2 x+\cos^2 y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

*（8）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right]\mathrm{d}z=$ ________.

9.3.3　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^6}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n(5i^4-18i^2j^2+5j^4)$.

9.3.4　计算 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant r^2$.

9.3.5　设 $D: x^2+y^2\leqslant x+y$，求 $I=\iint\limits_D (2x+3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

9.3.6　设 D 由下列曲线围成：$y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x=-\dfrac{\pi}{2}, y=1$，$f$ 是连续函数，求 $I=\iint\limits_D x[1+y^3 f(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

9.3.7　计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

9.3.8　计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

9.3.9　计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

9.3.10　设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2 \end{cases}$，计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big||x|+|y|\leqslant 2\}$.

9.3.11　求由曲面 $z=25-x^2-y^2$ 和平面 $z=0$ 所围成的立体的体积.

9.3.12　求 $I=\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 由上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 围成.

9.4　深化训练详解

9.3.1　（1）C；**提示**　被积函数相同并且非负，只需比较积分区域的范围大小即可.

（2）A；（3）C；

（4）B；**提示**　如图 9.9 所示，在极坐标系下二重积分的积分区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\,|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right\},$$

则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

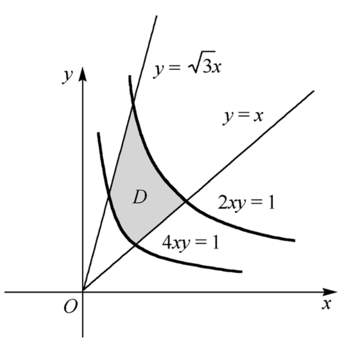

图 9.9

（5）B.

9.3.2　（1）$\mathrm{e}-1$；（2）$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2$；

（3）$\dfrac{7}{12}$；　**提示**　用极坐标系，$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=\dfrac{7}{12}$.

（4）$\dfrac{4}{3}$；**提示** 用对称性.

（5）$\dfrac{2}{3}$；（6）$\dfrac{a^4\pi}{4}x+y^2$；

（7）π；**提示** 用轮换对称性，原积分等于

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(\sin^2 x+\cos^2 y+\sin^2 y+\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi .$$

（8）$\dfrac{1}{2}$.

9.3.3 由题意

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(5i^4-18i^2j^2+5j^4)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[5\left(\frac{i}{n}\right)^4-18\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{j}{n}\right)^2+5\left(\frac{j}{n}\right)^4\right]\frac{1}{n^2}\\&=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}(5x^4-18x^2y^2+5y^4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

9.3.4 由积分中值定理得

$$\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cdot\cos(\xi+\eta)\cdot\pi r^2,\quad(\xi,\eta)\in D,$$

故

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\lim_{r\to 0}\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cdot\cos(\xi+\eta)\\&=\lim_{\substack{\xi\to 0\\\eta\to 0}}\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cdot\cos(\xi+\eta)=1.\end{aligned}$$

9.3.5 $I=\dfrac{5}{4}\pi$；**提示** $D:\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{2}$，利用极坐标，令 $x-\dfrac{1}{2}=r\cos\theta$，$y-\dfrac{1}{2}=r\sin\theta$.

9.3.6 利用二重积分的对称性，$I=-2$.

9.3.7 记 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1,(x,y)\in D\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\right\}$，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma&=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)r\,\mathrm{d}r+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\pi}{8}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

9.3.8　由 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$，得 $r\leqslant 2(\sin\theta+\cos\theta)$，从而

$$I=\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r(\cos\theta-\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)^3\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^3\,\mathrm{d}(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}(\cos\theta+\sin\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}(-4)=-\frac{8}{3}.$$

9.3.9　由题意

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4\,\mathrm{d}\cos\theta,$$

令 $u=\cos\theta$，原式 $=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1}u\cdot(1+u)^4\,\mathrm{d}u=\dfrac{16}{15}$.

9.3.10　因为被积函数关于 x,y 均为偶函数，且积分区域关于 x,y 轴均对称，所以

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=4\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D_1 为 D 在第一象限的部分，而

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0} x^2\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{1\leqslant x+y\leqslant 2,x\geqslant 0,y\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\,\mathrm{d}y+\left(\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}),$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=4\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

9.3.11　解法 1　（用二重积分）联立$\begin{cases} z=25-x^2-y^2 \\ z=0 \end{cases}$，解得交线为$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=0 \end{cases}$，所围部分在 xoy 平面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant 25$，于是

$$V=\iint\limits_D (25-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5 (25-r^2)r\,\mathrm{d}r=\frac{625}{2}\pi .$$

解法 2　取柱坐标变换$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$，则

$$\Omega'=\left\{(r,\theta,z)\,\middle|\,0\leqslant z\leqslant 25-r^2, 0\leqslant r\leqslant 5, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\},$$

从而

$$V=\iiint\limits_{\Omega'}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5 r\,\mathrm{d}r\int_0^{25-r^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^5 r(25-r^2)\,\mathrm{d}r=\frac{625}{2}\pi .$$

9.3.12　由$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$，解得 $z^2+3z-4=0$，所以 $z=1, x^2+y^2=3$，

取柱坐标变换$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$，则

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\,\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z\,\mathrm{d}z=\frac{13}{4}\pi .$$

第 10 章　常微分方程

10.1　知 识 要 点

本章内容主要包括微分方程的基本概念、一阶微分方程的类型及解法、可降阶的高阶微分方程的类型及解法、线性微分方程解的结构、二阶常系数微分方程的解法及微分方程的应用等.

10.1.1　微分方程的基本概念

（1）**微分方程**：含有自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的方程.

（2）**微分方程的阶**：微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

（3）n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \quad 或 \quad y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

其中 x 为自变量， $y=y(x)$ 为未知函数， $y^{(n)}$ 必须出现.

（4）n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=g(x),$$

其中 $a_1(x),\ a_2(x),\cdots,a_n(x),g(x)$ 均为自变量的已知函数.

（5）**通解**：含有 n 个独立任意常数 $c_1,\cdots,c_n$ 的解 $y=\phi(x,c_1,\cdots,c_n)$，称为 n 阶微分方程的通解，其中独立的任意常数不能通过合并使得通解中的任意常数个数减少.

10.1.2　一阶微分方程的解法

一阶微分方程的一般形式： $F(x,y,y')=0$ 或 $y'=f(x,y)$.

（1）可分离变量方程： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$.

解法　化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\dfrac{\mathrm{d}x}{f(x)}$，再积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

（2）齐次方程： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解法　（换元法）设 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $y=ux$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原方程化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u$. 分离变量求解.

（3）一阶线性微分方程： $y'+P(x)y=Q(x)$.

若 $Q(x)=0$，称其为一阶线性齐次微分方程，若 $Q(x)\neq0$，称其为一阶线性非齐次微分方程.

解法　利用分离变量法可以求出齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解：

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

利用常数变易法求解非齐次微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = \left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

注　一阶线性非齐次微分方程通解公式中的 $\int P(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 代表一个原函数，即不再含有任意常数.

（4）伯努利方程：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n$，$n \neq 0, 1$.

解法　（换元法）设 $z = y^{1-n}$，则化为一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

（5）全微分方程：$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

解法 1　（偏积分法）令 $\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$，得 $u(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + \phi(y)$. 代入 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$，解得 $\varphi(y)$，从而原方程的解为 $u(x,y) = C$.

***解法 2**　（曲线积分法）方程的解为

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y = C.$$

10.1.3　可降阶的二阶微分方程

（1）$y'' = f(x)$ 型

解法　连续两次积分即得.

（2）$y'' = f(x, y')$ 型　（特点：方程不显含未知函数 y）

解法　令 $y' = p$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p'$，原方程化为一阶微分方程 $p' = f(x,p)$，

若其解为 $p = \phi(x, C_1)$，则原方程的通解为 $y = \int \varphi(x, C_1)\ \mathrm{d}x + C_2$.

（3）$y'' = f(y, y')$ 型　（特点：方程不显含自变量 x）

解法　令 $y' = p$，将 y'' 化为对 y 的导数，即

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

原方程化为一阶微分方程 $p\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y,p)$，若其解为 $p = \varphi(y, C_1)$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(y, C_1)$，再分离变量求解.

10.1.4　二阶线性微分方程解的结构

二阶线性微分方程的一般形式：$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$.

当 $f(x)=0$ 时，$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 称为上述方程所对应的齐次方程.

原方程称为二阶线性非齐次微分方程.

定理 1　设 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也为该齐次方程的解，其中 C_1,C_2 为任意常数.

定理 2　设 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个线性无关的特解（即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq c$），则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为该齐次方程的通解，其中 C_1,C_2 为任意常数.

定理 3　设 $y^*(x)$ 为方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解，Y 为其对应齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，则 $y=y^*(x)+Y$ 为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的通解.

定理 4　设 $y_1(x),y_2(x)$ 分别为方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)\,,\quad y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 为方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解.

定理 5　若 $y_1(x)+\mathrm{i}\,y_2(x)$ 为方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+\mathrm{i}\,f_2(x)$$

的解，其中 $P(x),Q(x),f_1(x),f_2(x)$ 为实值函数，则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别为方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)\,,\quad y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的解.

10.1.5　二阶常系数线性微分方程的解法

（1）二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解法如表 10.1 所示.

表 10.1　微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解结构

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根为 λ_1,λ_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
λ_1,λ_2 为两个不等实根	$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
λ_1,λ_2 为两个相等实根	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$
λ_1,λ_2 为一对共轭复根 $\alpha\pm i\beta$,	$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

（2）二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的解法.

这里 p 和 q 为常数. 对于二阶常系数非齐次线性微分方程，只需求出一个特解，再求出其对应的齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，将二者相加即可为常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解. 求特解有多种方法，常用的有待定系数法.

非齐次线性微分方程的右端函数类型与特征根及特解的关系如表 10.2 所示.

这里 $P_m(x)$ 为已知的 m 次多项式，$Q_m(x)$ 为待定的 m 次多项式；$P_l(x)$ 为已知的 l 次多项式，$P_n(x)$ 为已知的 n 次多项式，$R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 为两个待定的 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$. 若 $f(x)$ 是上述多种情况之和，则可运用叠加原理，将特解设成相应多个特解之和，代入方程求出特解.

表 10.2　非齐次线性微分方程的右端函数类型与特征根及特解的关系

$f(x)$ 的类型	特征根	特解的形式
$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$	λ 不是特征方程的根	$y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q_m(x)$
	λ 是特征方程的单根	$y^*=x\mathrm{e}^{\lambda x}Q_m(x)$
	λ 是特征方程的重根	$y^*=x^2\mathrm{e}^{\lambda x}Q_m(x)$
$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$	$\lambda\pm\mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根	$y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$
	$\lambda\pm\mathrm{i}\omega$ 是特征方程的共轭复根	$y^*=x\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$

*10.1.6　高阶线性微分方程

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0,$$

其中 p_1，p_2，…，p_n 都是常数．其对应的特征方程是

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0.$$

根据特征方程的根，可以写出其对应的微分方程的解如表 10.3 所示．

表 10.3　n 阶常系数齐次线性微分方程解的结构

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项：$C\mathrm{e}^{rx}$
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	给出两项：$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k 重实根 r	给出 k 项：$\mathrm{e}^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	给出 C_1 项： $\mathrm{e}^{rx}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

从代数学知道，n 次代数方程有 n 个根（重根按重数计算），而特征方程的每个根都对应着通解中的一项，且每项各含一个任意常数，这样就得到 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n.$$

*10.1.7　欧拉方程

形如

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

的方程（p_1，p_2，…，p_n 为常数），称为**欧拉方程**．

作代换：$x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$，得

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Dy,$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=D(D-1)y,$$

……

$$x^n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=D(D-1)\cdots(D-n+1)y,$$

代入原方程，将原方程化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程，在求出该方程的解后，把 t 换为 $\ln x$，即得原方程的解.

10.2　典型例题分析

10.2.1　题型一、可分离变量微分方程与齐次微分方程的求解

例 10.2.1　【2005 年北京市竞赛题】设 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，且 $f(1)=a$，求 $f(2)$.

解　设 $f(x)=y$，则 $y\neq 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln|C|,$$

所以 $y=Cx$（C 为任意非零常数）. $y=0$ 时原方程成立，并入通解，所以原方程的通解为 $y=Cx$（C 为任意常数）. 代入 $f(1)=a$，得 $C=a$，所以 $f(2)=2a$.

例 10.2.2　【2013 年北京市竞赛题】 微分方程 $xy(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$，$y(1)=0$ 的解是________.

解　分离变量，得

$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,$$

积分，得

$$\int\frac{1}{2}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}(y^2)=\int\frac{1}{2}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}(x^2),$$

从而

$$\ln(1+y^2)=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\ln C,\quad 1+y^2=\frac{Cx^2}{1+x^2}.$$

代入 $y(1)=0$，得 $C=2$，所以原方程的解为 $(1+y^2)(1+x^2)=2x^2$.

例 10.2.3　【2009 年北京市竞赛题】设 $f(x,y)$ 可微，且满足条件

$$\mathrm{s}\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}=\cot y,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y),\quad f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

求 $f(x,y)$.

解　方程 $\dfrac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}=\cot y$ 两边对 y 积分，得

$$\ln\left|f(0,y)\right|=\ln|\sin y|+\ln|C|,$$

即 $f(0,y)=C\sin y$. 代入 $f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，得 $C=1$，所以 $f(0,y)=\sin y$. 解关于 x 的微分方程

$\frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，分离变量得

$$\frac{f_x'(x,y)}{f(x,y)}=-1,$$

两边对 x 积分，得

$$\ln|f(x,y)|=-x+\ln c_1(y),$$

即 $f(x,y)=c(y)\mathrm{e}^{-x}$．代入 $f(0,y)=\sin y$，得 $c(y)=\sin y$，故 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$．

例 10.2.4　求微分方程 $(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0\quad(x>0)$ 的解.

解　原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\sqrt{1+u^2}$，即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln Cx，即\ u+\sqrt{1+u^2}=Cx,$$

所以

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2.$$

10.2.2　题型二、一阶线性微分方程与伯努利方程的解法

例 10.2.5　设 $y=y_1(x), y=y_2(x)$ 是微分方程 $y'=P(x)y+Q(x)$ 的两个互异解，$y(x)$ 是该微分方程的任一解，则 $\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=$ ________．

解法 1　由已知，$y_2(x)-y_1(x)$ 为 $y'=P(x)y+Q(x)$ 所对应的齐次方程 $y'=P(x)y$ 的一个解，所以齐次方程 $y'=P(x)y$ 的通解为

$$y=C\left[y_2(x)-y_1(x)\right]\ （C\ 为任意常数）.$$

$y'=P(x)y+Q(x)$ 的通解为

$$y=y_1(x)+C\left[y_2(x)-y_1(x)\right]\ （C\ 为任意常数）.$$

由 $y(x)$ 是该微分方程的任一解，得

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=C\quad（C\ 为某一常数）.$$

解法 2　由已知，$y_2(x)-y_1(x)$，$y(x)-y_1(x)$ 均为对应齐次方程 $y'=P(x)y$ 的解，而 $y'=P(x)y$ 的通解为

$$y=C\left[y_2(x)-y_1(x)\right]\ （C\ 为任意常数）.$$

所以 $y(x)-y_1(x)=C[y_2(x)-y_1(x)]$，$C$ 为某一常数.

例 10.2.6 设 y_1,y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ、μ 使得 $\lambda y_1+\mu y_2$ 为该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是对应的齐次方程的解，则 $\lambda=$____，$\mu=$____.

解 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，代入方程解得 $\lambda-\mu=0$；$\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，代入方程解得 $\lambda+\mu=1$，联立解得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$.

例 10.2.7 求解方程 $y''-xy'-y=0$.

解 原方程可化为 $(y'-xy)'=0$，所以 $y'-xy=C_1$，方程为一阶线性微分方程，解为

$$y=\mathrm{e}^{\int x\,\mathrm{d}x}\left(\int C_1\mathrm{e}^{-\int x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_2\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(C_1\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x+C_2\right).$$

例 10.2.8 设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 两边求导，得

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^x f^2(x),$$

即

$$f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x f^2(x).$$

$y'-y=\mathrm{e}^x y^2$ 为伯努利方程．取 $z=y^{1-2}=y^{-1}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

方程化为

$$z'+z=-\mathrm{e}^x,\quad z(0)=1.$$

解得

$$z=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x},$$

所以原方程的解为

$$\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)y=1.$$

例 10.2.9 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(t)=4\pi t^2+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $f(t)$.

解　由题意

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{r}{2}\right)r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{2t}f\left(\frac{r}{2}\right)r\,\mathrm{d}r,$$

原方程变为

$$f(t)=4\pi t^2+2\pi\int_0^{2t}f\left(\frac{r}{2}\right)r\,\mathrm{d}r.$$

两边求导，得

$$f'(t)=8\pi t+8\pi tf(t),$$

为一阶线性方程 $y'-8\pi ty=8\pi t$，解为 $y=ce^{4\pi t^2}-1$．在等式中令 $t=0$，得 $f(0)=0$．代入通解，得 $c=1$，所以

$$f(t)=e^{4\pi t^2}-1.$$

例 10.2.10 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对于任意的实数 a,b 都有等式

$$f(a+b)=e^a f(b)+e^b f(a)$$

成立，且 $f'(0)=1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　在等式中令 $a=b=0$，解得 $f(0)=0$．根据导数的定义

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x f(\Delta x)+e^{\Delta x} f(x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x[f(\Delta x)-f(0)]+f(x)(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}\\&=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\&=e^x f'(0)+f(x)\\&=e^x+f(x),\end{aligned}$$

解方程 $f'(x)-f(x)=e^x$，可得 $f(x)=e^x(C+x)$．代入 $f(0)=0$，得 $C=0$，所以

$$f(x)=xe^x.$$

10.2.3　题型三、全微分方程的解法

例 10.2.11　求解微分方程 $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$.

解法 1　（偏积分法）设 $P=3x^2+6xy^2$，$Q=6x^2y+4y^3$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy$，原方程为全微分方程．由 $u'_x=P=3x^2+6xy^2$，两边对 x 偏积分，得

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi(y),$$

从而

$$u'_y=6x^2y+\varphi'(y)=Q=6x^2y+4y^3,$$

所以 $\varphi'(y)=4y^3$，解得 $\varphi(y)=y^4$，即有 $u=x^3+3x^2y^2+y^4$，所以原方程的解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C\ （C\text{为任意常数}）.$$

解法 2　（凑积分法）

$$\begin{aligned}(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy&=dx^3+dy^4+(6xy^2\,dx+6x^2y\,dy)\\&=dx^3+dy^4+d(3x^2y^2)\\&=d(x^3+y^4+3x^2y^2),\end{aligned}$$

所以原方程的解为 $x^3+y^4+3x^2y^2=C$（C 为任意常数）.

例 10.2.12　【2014 年北京市竞赛题】若方程 $(6y+x^2y^2)\mathrm{d}x+(8x+x^3y)\mathrm{d}y=0$ 两边乘以 $y^3f(x)$ 为全微分方程，求 $f(x)$，并求解方程.

解　由题意，$(6y^4+x^2y^5)f(x)\mathrm{d}x+(8xy^3+x^3y^4)f(x)\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程，设

$$P=(6y^4+x^2y^5)f(x),\quad Q=(8xy^3+x^3y^4)f(x),$$

由 $P'_y=Q'_x$，得

$$(24y^3+5x^2y^4)f(x)=(8y^3+3x^2y^4)f(x)+(8xy^3+x^3y^4)f'(x)$$

化简得，$2f(x)=xf'(x)$，分离变量，解得

$$f(x)=C_1x^2\text{（}C_1\text{ 为任意常数）.}$$

由偏积分法，解得原方程的解为

$$10x^3y^4+x^5y^5=C\text{（}C\text{ 为任意常数）.}$$

10.2.4　题型四、可降阶的二阶微分方程的解法

例 10.2.13　求解微分方程 $y''-y'=x$.

解　方程为不显含 y 的可降阶的二阶方程．取 $y'=p$，$y''=p'$，原方程化为

$$p'-p=x,$$

解为

$$p=\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\left(C_1+\int x\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=C_1\mathrm{e}^x-x-1.$$

所以

$$y'=p=C_1\mathrm{e}^x-x-1,$$

$$y=C_1\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-C_2\text{（}C_1,C_2\text{ 为任意常数）.}$$

例 10.2.14　求解微分方程 $yy''+y'^2=0$，$y'(0)=\dfrac{1}{2}$，$y(0)=1$.

解法 1　方程为不显含 x 的可降阶的二阶方程，取 $y'=p$，$y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

原方程化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$．$p=0$ 不满足 $y'(0)=\dfrac{1}{2}$，所以 $p\neq 0$．消去 p 得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{-\mathrm{d}y}{y},$$

解得 $py=C_1$，即 $yy'=C_1$，代入初值条件得 $C_1=\dfrac{1}{2}$，从而 $2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，解得 $y^2=x+C_2$，代入初值条件，得 $C_2=1$，所以原方程的解为 $y^2=x+1$.

解法 2　原方程化为 $(yy')'=0$，所以 $yy'=C_1$，代入初值条件得 $C_1=\dfrac{1}{2}$，所以

$$2y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\,,$$

解得 $y^2 = x + C_2$，代入初值条件，得 $C_2 = 1$，所以原方程的解为 $y^2 = x + 1$.

例 10.2.15　【2006 年北京市竞赛题】求解方程 $y''' - \frac{1}{x}y'' = x$.

解　设 $y'' = p$，则 $y''' = p'$，原方程化为 $p' - \frac{1}{x}p = x$，该方程为一阶线性微分方程．故

$$p = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C + \int x\mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right] = x^2 + Cx\,,$$

即 $y'' = x^2 + Cx$，所以原方程的解为

$$y = \frac{1}{12}x^4 + C_1x^3 + C_2x + C_3\text{（}C_1, C_2, C_3\text{ 为任意常数）.}$$

10.2.5　题型五、二阶线性微分方程解的结构

例 10.2.16　二阶线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 有三个特解：$y_1 = \mathrm{e}^x$，$y_2 = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$，$y_3 = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$，则该方程为________.

解　由于 $y_2 - y_1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ 和 $y_3 - y_1 = \mathrm{e}^{-x}$ 为对应齐次方程的解，从而齐次方程的特征根为 $\lambda = \frac{1}{2}$ 和 $\lambda = -1$，特征方程为 $\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$，所以

$$p = \frac{1}{2} \quad q = -\frac{1}{2}\,,$$

对应齐次方程为 $y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$．设非齐次方程为 $y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = f(x)$，代入 $y_1 = \mathrm{e}^x$，得 $f(x) = \mathrm{e}^x$．所以所求方程为

$$y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = \mathrm{e}^x\,.$$

例 10.2.17　【2006 年北京市竞赛题】设 $\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x$ 均为微分方程 $y'' + ay' + by = f(x)$ 的解，则 $(a+b)f(0) =$____________.

解　由已知得 $\mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{2x}$ 为相应齐次方程的两个线性无关解，特征根为 $\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 2$，特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$，所以齐次方程为 $y'' - 5y' + 6y = 0$，即有

$$a = -5,\ b = 6\,,$$

将特解 $y = \mathrm{e}^x$ 为代入方程 $y'' - 5y' + 6y = f(x)$，得 $f(x) = 2\mathrm{e}^x$，所以

$$(a+b)f(0) = 2\,.$$

例 10.2.18　【2007 年北京市竞赛题】设 $y = \mathrm{e}^{2x} + (1+x)\mathrm{e}^x$ 为二阶常系数微分方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma\mathrm{e}^x$ 的一个特解，求 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

解法 1　将特解 $y = \mathrm{e}^{2x} + (1+x)\mathrm{e}^x$ 代入原方程，得

$$[4\mathrm{e}^{2x}+(3+x)\mathrm{e}^{x}]+\alpha[2\mathrm{e}^{2x}+(2+x)\mathrm{e}^{x}]+\beta[\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}]=\gamma\mathrm{e}^{x},$$

整理得

$$(4+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^{2x}+(3+2\alpha+\beta-\gamma)\mathrm{e}^{x}+(1+\alpha+\beta)x\mathrm{e}^{x}=0,$$

所以有

$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\1+\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta-\gamma=0\end{cases},$$

解得 $\alpha=-3$， $\beta=2$， $\gamma=-1$．故 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=14$．

解法 2　由特解形式，若 $\mathrm{e}^{2x},\mathrm{e}^{x}$ 为对应齐次方程的两个解， $y=x\mathrm{e}^{x}$ 为原方程的一个特解，则对应齐次方程的特征根为 $\lambda_1=2$， $\lambda_2=1$，特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，所以齐次方程为 $y''-3y'+2y=0$，即有 $\alpha=-3,\beta=2$．将特解 $y=x\mathrm{e}^{x}$ 代入原方程 $y''-3y'+2y=\gamma\mathrm{e}^{x}$，解得 $\gamma=-1$，所以

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=14.$$

若 $\mathrm{e}^{x},x\mathrm{e}^{x}$ 为对应齐次方程的两个解， $y=\mathrm{e}^{2x}$ 为原方程的一个特解，此时齐次方程的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，齐次方程为 $y''-2y'+y=0$，将特解 $y=\mathrm{e}^{2x}$ 代入原方程

$$y''-2y'+y=\gamma\mathrm{e}^{x},$$

得 $\mathrm{e}^{2x}=\gamma\mathrm{e}^{x}$，无解.

10.2.6　题型六、二阶常系数线性微分方程的解法

例 10.2.19　【2008 年北京市竞赛题】设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+4y'+4y=0$，且 $y(0)=0$, $y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=$__________.

解　特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，特征根为重根 $\lambda=-2$，所以齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

代入初值条件，得 $C_1=0,C_2=1$，则 $y=x\mathrm{e}^{-2x}$，所以

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)$$

$$=-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=0-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{4}.$$

例 10.2.20　求微分方程 $y''-2y'-\mathrm{e}^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1$， $y'(0)=1$ 的解.

解　对应的齐次方程为 $y''-2y'=0$，特征方程为 $\lambda^2-2\lambda=0$，特征根为 $\lambda_1=0$， $\lambda_2=2$．于是齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{2x}$．由 $\lambda=2$ 是特征方程的单根，设原方程的特解为 $y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$，代入原方程解得 $A=\frac{1}{2}$．故得特解 $y^*=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}$，所以原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}.$$

由初始条件 $y(0)=1$，得 $C_1+C_2=1$．由 $y'(0)=1$ 得 $2C_2+\frac{1}{2}=1$，解得 $C_1=\frac{3}{4}$，$C_2=\frac{1}{4}$，则满足初始条件的通解为

$$y=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x\right)e^{2x}.$$

例 10.2.21　【2009 年北京市竞赛题】设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$ 为某个二阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该方程为________.

解　设二阶常系数齐次线性微分方程为 $y''+py'+qy=0$，由通解形式可知其特征方程有一对共轭复根 $1\pm i$．

解法 1　$p=-[(1+i)+(1-i)]=-2$，$q=(1+i)\cdot(1-i)=2$，
所以微分方程为 $y''-2y'+2y=0$．

解法 2　$y''+py'+qy=0$ 的两根为 $\frac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}\,i}{2}$，从而 $-\frac{p}{2}=1$，$\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}=1$，
解得 $p=-2, q=2$．所以微分方程为 $y''-2y'+2y=0$．

例 10.2.22　用变换 $x=\cos t\ (0<t<\pi)$ 化简方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求满足条件 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 的解.

解

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{\sin t}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

代入原方程，化为 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$．特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征值为 $\lambda=\pm i$，所以方程的通解为

$$Y=C_1\cos t+C_2\sin t=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}.$$

由 $y(0)=1$，$y'(0)=2$，得 $C_1=2, C_2=1$，则原方程的解为 $Y=2x+\sqrt{1-x^2}$．

例 10.2.23　设 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，$y'\neq 0$，$x=x(y)$ 为 $y=y(x)$ 的反函数.

（1）将 $x=x(y)$ 满足的方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 化为 $y=y(x)$ 满足的方程.

（2）求满足 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

解　（1）$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'}$，

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{-y''}{(y')^2}\frac{1}{y'}=\frac{-y''}{(y')^3}.$$

代入，则原方程化为 $y''-y=\sin x$．

（2）原方程对应的齐次方程为 $y''-y=0$，特征方程为 $\lambda^2-1=0$，特征根为 $\lambda=\pm 1$，所以

齐次方程通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$．由于 $0+\mathrm{i}$ 不为特征根，故设方程 $y''-y=\sin x$ 的特解为 $y^*=c_1\cos x+c_2\sin x$，代入 $y''-y=\sin x$，解得

$$c_1=0, c_2=-\frac{1}{2},$$

所以 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$ 为 $y''-y=\sin x$ 的一个特解．所以原方程的通解为

$$y=y_2^*+Y=-\frac{1}{2}\sin x+C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1, C_2=-1$，所以原方程的解为 $y=-\frac{1}{2}\sin x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$．

注　微分方程 $y''-y=\sin x$ 的特解也可以采用如下方法求解.

方程 $y''-y=\sin x$ 对应方程 $y''-y=\mathrm{e}^{(0+\mathrm{i})x}$，所以方程 $y''-y=\sin x$ 的特解对应方程 $y''-y=\mathrm{e}^{(0+\mathrm{i})x}$ 特解的虚部. 由于 $0+\mathrm{i}$ 不为特征根，故方程 $y''-y=\mathrm{e}^{(0+\mathrm{i})x}$ 的特解可设为 $y^*=B\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，代入方程，得 $B=-\frac{1}{2}$，特解的虚部为 $y_2^*=-\frac{1}{2}\sin x$，即为方程 $y''-y=\sin x$ 的一个特解.

例 10.2.24　【2011 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 为连续函数，满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　原方程可化为

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

两边对 x 求导，得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

再对 x 求导，得 $f''(x)+f(x)=-\sin x$，由方程可得初始条件 $f(0)=0$，$f'(0)=1$．解初值问题

$$\begin{cases} y''+y=-\sin x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}.$$

对应齐次方程为 $y''+y=0$，特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$，齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

由于 $0+\mathrm{i}$ 为 $\lambda^2+1=0$ 的单根，故设 $y^*=x(A\sin x+B\cos x)$ 为 $y''+y=-\sin x$ 的一个特解，代入原方程解得 $A=0, B=\frac{1}{2}$，所以特解为 $y_2^*=\frac{1}{2}x\cos x$．所以非齐次方程的通解为

$$y=y_2^*+Y=\frac{1}{2}x\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x,$$

代入 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，解得 $C_1=0, C_2=-\frac{1}{2}$．所以初值问题的解为 $y=\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}\sin x$，即 $f(x)=\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}\sin x$．

注　微分方程 $y''+y=-\sin x$ 的特解也可以采用如下方法求解.

方程 $y''+y=-\sin x$ 对应方程 $y''+y=-e^{ix}$，$0+i$ 为 $\lambda^2+1=0$ 的单根，故设非齐次方程 $y''+y=-e^{ix}$ 的一个特解为 $y^*=xBe^{ix}$，代入方程，解得 $B=\frac{i}{2}$，故 $y_2{}^*=\frac{1}{2}x\cos x$ 为非齐次方程的一个特解.

例 10.2.25　设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}.$$

若 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

解　设 $u=e^x\cos y$，则 $z=f(u)=f(e^x\cos y)$，求导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y,$$

则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=f''(e^x\cos y)e^{2x}.$$

由已知条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，可知

$$f''(u)=4f(u)+u.$$

这是一个二阶常系数非齐次线性方程，对应齐次方程的通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$. 对应非齐次方程的解为 $y^*=-\frac{1}{4}u$，故非齐次方程的通解为

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u.$$

将初始条件 $f(0)=0$，$f'(0)=0$ 代入，可得 $C_1=\frac{1}{16},C_2=-\frac{1}{16}$，所以 $f(u)$ 的表达式为

$$f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u.$$

10.2.7　题型七、微分方程的综合问题

例 10.2.26　【2014 年北京市竞赛题】设某微分方程的通解为 $(y-C_2)^2=4C_1x$，则该微分方程为________.

解　由于 $(y-C_2)^2=4C_1x$，对 x 求导，得 $2(y-C_2)y'=4C_1$，再对 x 求导，得

$$2(y')^2+2(y-C_2)y''=0,$$

消去 C_1,C_2，解得所求微分方程为 $2xy''+y'=0$.

例 10.2.27　求 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 所满足的微分方程（其中 a,b 为任意常数）.

解　方程两边对 x 求导，得

$$2(x-a)+2(y-b)y'=0,$$

再对 x 求导，得

$$2+2y'^2+2(y-b)y''=0,$$

所以

$$y-b=-\frac{1+y'^2}{y''},\ x-a=\frac{1+y'^2}{y''}y',$$

代入原方程即得微分方程为

$$\left(\frac{1+y'^2}{y''}y'\right)^2+\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2=1.$$

例 10.2.28　【2016 年全国竞赛预赛题】若 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$，记 $z=f(\mathrm{e}^x y^2)$．若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，则当 $x>0$ 时，$f(x)=$________________．

解　由题意

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^x y^2)\cdot \mathrm{e}^x y^2=f(\mathrm{e}^x y^2),$$

令 $\mathrm{e}^x y^2=u$，则当 $u>0$ 时，有 $f'(u)\cdot u=f(u)$，即

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u},\qquad [\ln f(u)]'=(\ln u)',$$

所以

$$\ln f(u)=\ln u+C_1,\quad f(u)=Cu,$$

代入 $f(1)=2$，得 $C=2$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=2x$．

例 10.2.29　设级数 $\dfrac{x^4}{2\cdot 4}+\dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$，求：（1）$S(x)$ 满足的微分方程；（2）$S(x)$ 的表达式．

解　由题意

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\cdots=x\left[\frac{1}{2}x^2+S(x)\right],$$

设 $y=S(x)$，则 $S(x)$ 满足的微分方程为 $y'-xy=\dfrac{1}{2}x^3$，$y(0)=0$．方程的解为

$$y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}-\frac{1}{2}x^2-1,$$

代入 $y(0)=0$，得 $C=1$，则 $S(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}-\dfrac{1}{2}x^2-1$．

例 10.2.30　设级数 $1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$ $x\in(-\infty,+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$．

（1）求 $S(x)$ 满足的微分方程；（2）求 $S(x)$ 的表达式.

解　$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$，　$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$，　$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$，

$$S''(x)+S'(x)+S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}\right]$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x.$$

所以 $S(x)$ 满足的微分方程为 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x, y(0)=1$．求解得

$$S(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x.$$

例 10.2.31　设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：

$$f'(x)=g(x)，\quad g'(x)=f(x)，$$

且 $f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x$．（1）求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；（2）求出 $F(x)$ 的表达式.

解　（1）由于 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=f^2(x)+g^2(x)$

$$=[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)=(2\mathrm{e}^x)^2-2F(x)，$$

所以 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程是

$$F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}.$$

（2）由题意

$$F(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left[\int 4\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-2x}\cdot\left(\int 4\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{-2x}.$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$，于是 $F(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$.

例 10.2.32　设函数 $y(x)$ $(x\geqslant 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$．过 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1．区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，已知 $2S_1-S_2\equiv 1$，求此曲线的方程.

解　设曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(x)(X-x).$$

它与 x 轴的交点为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$，从而

$$S_1=\frac{y}{2}\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{1}{2}\frac{y^2}{y'}.$$

又 $S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$，由 $2S_1-S_2=1$，得

$$\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(x)\mathrm{d}t=1.$$

两边求导并化简，得 $yy''=y'^2$. 令 $p=y'$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入解得 $y'=p=C_1y$，所以 $y=\mathrm{e}^{C_1x+C_2}$. 由 $y(0)=1$ 和 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=1$ 可得 $y'(0)=1$，从而有 $C_1=1$，$C_2=0$.

故所求曲线的方程为 $y=\mathrm{e}^x$.

例 10.2.33　设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续. 若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$，$x=t\ (t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)],$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$ 的解.

解　由绕 x 轴旋转的旋转体体积公式得

$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x .$$

由题意得

$$\pi\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)],$$

即

$$3\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x=t^2f(t)-f(1) .$$

两边对 t 求导，得

$$3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t),$$

所以 $y=f(x)$ 所满足的微分方程为

$$3f^2(x)=2xf(x)+x^2f'(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right).$$

这是一阶齐次微分方程. 令 $y=ux$，有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，则上式化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u^2-2u,$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u(u-1) .$$

若 $u=0$，则 $y=ux=0$，不满足初始条件 $y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$，舍去；若 $u=1$，则 $y=ux=x$，不满足初始条件 $y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$，舍去；所以，$u\neq 0$ 且 $u\neq 1$. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)}=\frac{3\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得 $\frac{u-1}{u}=Cx^3$. 所以通解为 $y-x=Cx^3y$ ，C 为任意常数．由 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 得 $C=-1$ ，从而所求的解为 $y=\frac{x}{1+x^3}\ (x\geqslant1)$.

例 10.2.34　设曲线 $y=f(x)$，其中 $y=f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$，$x=1$ 及 $x=t\ (t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线方程.

解　旋转体体积为

$$V=\int_1^t\pi f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x,$$

曲边梯形面积为

$$S=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x,$$

则由 $V=\pi tS$ ，得

$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x .$$

两边对 t 求导可得

$$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t),$$

即

$$f^2(t)-tf(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x,$$

再求导得

$$2f(t)f'(t)-f(t)-tf'(t)=f(t),$$

记 $f(t)=y$ ，化简可得 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2y}t=1$，解得 $t=Cy^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}y$. 令 $t=1$ ，则

$$f^2(1)-f(1)=f(1)[f(1)-1]=0,$$

因为 $f(t)>0$ ，所以 $f(1)=1$. 代入 $t=Cy^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}y$ 得 $C=\frac{1}{3}$ ，即 $t=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+2y\right)$.

所以该曲线方程为 $2y+\frac{1}{\sqrt{y}}-3x=0$.

*10.2.8　题型八、微分方程建模问题

例 10.2.35　在 13 时到 14 时的什么时刻，一个时钟的分针恰好与时针重合.

分析　若 t 时刻分针与时针分别位于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 处，则由 $x(t)=y(t)$ 就可求得两针重合的时间，所以问题的关键是求得 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的表达式. 由于分针和时针都是做匀速运动，其位置函数容易求得.

解　将圆周角 60 等分，设每份为一个单位，又设 $t(\min)$ 时刻分针与时针分别位于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 处，由于初始时间为 13 时，分针与时针的速度分别为 1（单位/ min）与 5 / 60（单位/ min），故有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1\\ x(0)=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{12}\\ y(0)=5\end{cases},$$

解得 $x=t, y=\dfrac{1}{12}t+5$. 由 $x=y$，得 $t=\dfrac{60}{11}(\min)\approx 5\min 27\mathrm{s}$，即两针在 13 时 5 分 27 秒重合.

例 10.2.36　【2009 年北京市竞赛题】某湖泊的蓄水量为 V，每年排入湖泊中的含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$. 已知 2005 年年底湖泊中污染物 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定的指标. 为了治理污染，从 2006 年年初，限定流入湖泊中的含污染物 A 的污水浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$，问至多经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内？假设湖泊中污染物 A 的浓度是均匀的.

解　设第 t 年湖泊中污染物 A 的含量为 $m(t)$，则浓度为 $\dfrac{m(t)}{V}$，污染物增量为 $\mathrm{d}m(t)$.

设 $t_0=0, m(0)=5m_0, m(T)=m_0$. 由于

污染物 A 的增量=污染物 A 的流入量 – 污染物 A 的流出量，

在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内污染物 A 的流入量为

$$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\mathrm{d}t=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t,$$

污染物 A 的流出量为

$$\frac{m(t)}{V}\cdot\frac{V}{3}\mathrm{d}t=\frac{m(t)}{3}\mathrm{d}t,$$

因此

$$\mathrm{d}m=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t-\frac{m}{3}\mathrm{d}t,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\frac{m}{3}=\frac{m_0}{6},$$

故

$$m(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{3}\mathrm{d}t}\left[\int\frac{m_0}{6}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{3}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=\frac{m_0}{2}+C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}.$$

由初始条件 $m(0)=5m_0$，得 $C=\dfrac{9}{2}m_0$．故

$$m(t)=\frac{m_0}{2}\left(1+9\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}\right).$$

由 $m(T)=\dfrac{m_0}{2}\left(1+9\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}T}\right)=m_0$，解得 $T=6\ln 3\approx 6.6$，即至多经过 $6\ln 3\approx 6.6$ 年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内．

注　微分方程也可视为可分离变量的微分方程，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}m}{m_0-2m}=\frac{1}{6}\mathrm{d}t.$$

两边积分，得

$$\ln|m_0-2m|=-\frac{1}{3}t+\ln C_1,$$

即 $m(t)=\dfrac{m_0}{2}+C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}$．

例 10.2.37　某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增加阻力，使飞机迅速减速并停下．现有质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h，经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$）．问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

分析　需先求得飞机滑行的运动方程．由于飞机受到的外力仅有空气阻力，根据牛顿第二定律可以建立微分方程．

解　由题设，飞机的质量 $m=9000\text{kg}$，着陆时的水平速度 $v_0=700\text{km/h}$．从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$．根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv,$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t.$$

两端积分，得通解为

$$v=C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

代入初始条件 $v\big|_{t=0}=v_0$ 解得 $C=v_0$，故

$$v(t)=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

所以飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t=-\frac{mv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05\text{km}.$$

例 10.2.38　【2007 年北京市竞赛题】飞机在机场开始滑行着陆．在着陆时刻已失去垂直速度，水平速度为 v_0 米 / 秒，飞机与地面的摩擦系数为 μ，且飞机运动时所受空气的阻力与速度的平方成正比，在水平方向的比例系数为 k_x 千克·秒^2 / 米^2，在垂直方向的比例系数为 k_y 千克·秒^2 / 米^2，设飞机的质量为 m 千克，求飞机从着陆到停止所需的时间．

解　水平方向的阻力 $R_x=k_xv^2$，垂直方向的阻力 $R_y=k_yv^2$，摩擦力 $W=\mu(mg-R_y)$．

由牛顿第二定律，有 $W+R_x=m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k_x-\mu k_y}{m}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2+\mu g=0.$$

记 $A=\dfrac{k_x-\mu k_y}{m},B=\mu g$．由题意知 $A>0$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+A\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2+B=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+Av^2+B=0.$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{Av^2+B}=-\mathrm{d}t$，积分得

$$\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A}{B}}v\right)=-t+C.$$

代入初始条件 $t=0,v=v_0$，得 $C=\dfrac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}}v_0\right)$，所以

$$t=\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A}{B}}v_0\right)-\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A}{B}}v\right).$$

当 $v=0$ 时，

$$t=\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A}{B}}v_0\right)=\sqrt{\frac{m}{(k_x-\mu k_y)\mu g}}\arctan\sqrt{\frac{k_x-\mu k_y}{m\mu g}}v_0(\text{秒}).$$

例 10.2.39　【2008 年北京市竞赛题】（容器侧壁的形状问题）某个容器的侧面是由曲线 $x=f(y)\ (y\geqslant 0)$ 绕铅直中心轴 y 轴旋转而成，其中 $f(y)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，容器底面（过 x 轴的水平截面）为半径 $R=1$ 的圆（即 $f(0)=1$）．当匀速地向容器内注水时，若液面高度 h 的升高速度与 $(2V+\pi)$ 成反比（这里 V 表示当时容器内水的体积），求容器侧壁的轴截线 $x=f(y)$．

解　设在时刻 t 容器内水的液面高度为 h，而水的体积为 V，则有

$$V=\pi\int_0^h f^2(y)\mathrm{d}y\ .$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\pi f^2(h)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\ .$$

由题意，有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=k_1,\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{k_2}{2V+\pi}=\frac{k_2}{2\pi\int_0^h f^2(y)\mathrm{d}y+\pi}\ .$$

代入上式，可得

$$k_1=\pi f^2(h)\cdot\frac{k_2}{2\pi\int_0^h f^2(y)\mathrm{d}y+\pi}\ .$$

化简得

$$f^2(h)=\frac{k_1}{k_2}\left[1+2\int_0^h f^2(y)\mathrm{d}y\right].$$

由 $f(0)=1$，可得 $k_1=k_2$，上式两端同时对 h 求导得

$$2f(h)f'(h)=2f^2(h)\ ,$$

即 $f'(h)=f(h)$．解得满足 $f(0)=1$ 的解为 $f(h)=\mathrm{e}^h$，即容器侧壁的轴截线为 $x=f(y)=\mathrm{e}^y$.

10.3　深 化 训 练

10.3.1　单项选择题

（1）设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解为（　　）.

（A） $C[y_1(x)-y_2(x)]$；　　（B） $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$；

（C） $C[y_1(x)+y_2(x)]$；　　（D） $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.

（2）设 y_1,y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+2\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-2\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则（　　）.

（A） $\lambda=\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$；　　（B） $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{4}$；

（C） $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$；　　（D） $\lambda=\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{4}$.

（3）微分方程 $x\ln x\cdot y''=y'$ 的通解为（　　）.

（A） $y=C_1x\ln x+C_2$；　　（B） $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$；

（C） $y=x\ln x$；　　（D） $y=C_1x(\ln x-1)+2$.

（4）若二阶非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 有一个特解 $y^*=\mathrm{e}^{-x}(x\cos x+x\sin x)$，则（　　）.

（A） $a=-1,b=1$；　　（B） $a=1,b=-1$；

（C）$a=2,b=1$；　（D）$a=2,b=2$．

（5）若二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个特解：$y_1=\mathrm{e}^x$，$y_2=x\mathrm{e}^x$，$y_3=x^2\mathrm{e}^x$，则它的通解为（　　）．

（A）$(C_1+C_2x)x\mathrm{e}^x-(C_1+C_2)\mathrm{e}^x$；　（B）$(C_1+C_2x)x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$；

（C）$(C_1+C_2x)+x\mathrm{e}^x-(1-C_1-C_2)\mathrm{e}^x$；　（D）$(C_1+C_2x)x\mathrm{e}^x+(1-C_1-C_2)\mathrm{e}^x$．

10.3.2　填空题

（1）微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解为________．

（2）微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 的特解是________．

（3）过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程是________．

（4）设 $\varphi(x)$ 连续，且满足 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^x(t-x)\varphi(t)\mathrm{d}t$，则 $\varphi(x)=$________．

（5）设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$________．

10.3.3　把 $y=y(x)$ 满足的方程 $y''+(x+\mathrm{e}^{2y})y'^3=0$ 化为 $x=x(y)$ 满足的方程，并求解此方程．

10.3.4　用 $x=\mathrm{e}^t$ 化简欧拉方程 $x^2y''-xy'+y=0$，并求解．

10.3.5　设 $\varphi(u)$ 可导，$\varphi(0)=1$，函数 $z=\varphi(x+y)\mathrm{e}^{xy}$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，求 $\phi(u)$．

10.3.6　当 $u>0$ 时，$f(u)$ 有一阶连续导数，且 $f(1)=0$，又 $z=f(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y)$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$，求 $f(u)$．

10.3.7　设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，由曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

10.3.8　设函数 $f(x)$ 在[0, 1]上可导，并有 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=af(x)+bx$，其中 a 和 b 为实数，试求 $f(x)$．

10.3.9　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)+4\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3,$$

试求 $f(x)$ 的表达式.

10.3.10　【2009 年全国竞赛题】已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，$y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 为某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

10.3.11　求解方程 $y''+y'=9x^2+4$．

10.3.12　【2014 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(x)=f(1-x)$，求 $f(x)$ 的表达式.

10.3.13　设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$，试求：在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程，且满足条件 $y(0)=0$．

10.3.14　【2010 年北京市竞赛题】 位于坐标原点的我舰向位于 Ox 轴上距原点 1 个单位的 A 点处的敌舰发射制导鱼雷，使鱼雷永远对准敌舰，设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 Oy 轴的直线行驶，又设鱼雷的速度是敌舰的 5 倍．求鱼雷的行进轨迹的曲线方程，及敌舰行驶多远时被鱼雷击中？

10.4　深化训练详解

10.3.1　（1）B；（2）B；（3）B；（4）B；（5）C．

10.3.2　（1）$x^2+xy-y^2=\dfrac{C}{x}$，其中 C 为任意常数；**提示**　该方程为齐次方程，令 $y=xu$，再分离变量求解．

（2）$y=\sqrt{x+1}$；**提示**　令 $y'=p$，则原方程化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$，再分离变量求解．

（3）$y\arcsin x=x-\dfrac{1}{2}$；**提示**　**解法 1** 原方程为 $(y\arcsin x)'=1$，故 $y\arcsin x=x+C$；**解法 2** 用一阶线性微分方程的公式求解．

（4）$\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x)$；　（5）$\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^x$．

10.3.3
$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{x'_y},$$
$$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x'_y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{x'_y}\right)\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{-x''}{x'^3},$$
代入原方程化为 $x''-x=\mathrm{e}^{2y}$．齐次方程为 $\lambda^2-1=0$，$\lambda=\pm1$，齐次方程通解为 $X=C_1\mathrm{e}^y+C_2\mathrm{e}^{-y}$．设方程 $x''-x=\mathrm{e}^{2y}$ 的特解为 $x^*=A\mathrm{e}^{2y}$，代入解得 $A=\dfrac{1}{3}$，所以方程通解为 $x=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2y}+C_1\mathrm{e}^y+C_2\mathrm{e}^{-y}$．

10.3.4　由 $x=\mathrm{e}^t$，得 $t=\ln x$，则
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{x},$$
$$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$
代入原方程得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0$．特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=1$，方程的解为 $y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t$，代入 $t=\ln x$，则 $y=(C_1+C_2\ln x)x$，所以原方程的通解为
$$y=(C_1+C_2\ln|x|)x.$$

10.3.5　由题意
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x+y)\mathrm{e}^{xy}+\varphi(x+y)\mathrm{e}^{xy}\cdot y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(x+y)\mathrm{e}^{xy}+\varphi(x+y)\mathrm{e}^{xy}\cdot x,$$

代入 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得

$$-2\varphi'(x+y)=\varphi(x+y)\cdot(x+y),$$

即

$$-2\varphi'(u)=\varphi(u)u,\ \varphi(0)=1,$$

解得 $\varphi(u)=\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$.

10.3.6　记 $u=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^x f'(u)-\mathrm{e}^y f'(u)\ \ =u f'(u)=1,$$

解得 $f(u)=\ln|u|+C$. 由于 $u>0$，且 $f(1)=0$，所以 $f(u)=\ln u$.

10.3.7　切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$，令 $y=0$，得 $x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，所以 $(x_0,0)$ 到切线与 x 轴交点的距离为

$$\left|x-x_0\right|=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

$(x_0,0)$ 与切点的距离为 $f(x_0)$，可以得到切线与 $x=x_0$，x 轴所围成的直角三角形面积为 $\frac{1}{2}\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}=4$，整理得微分方程 $f^2(x_0)=8f'(x_0)$，解得 $\frac{1}{8}x_0+C=-\frac{1}{f(x_0)}$. 又因为 $f(0)=2$，可以计算出 $C=-\frac{1}{2}$，即 $f(x)=\frac{8}{4-x}$.

10.3.8　令 $u=tx$，$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，从而

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=af(x)+bx,$$

即

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=axf(x)+bx^2,$$

等式两边对 x 求导数，则

$$f(x)=af(x)+axf'(x)+2bx,$$

即 $axy'+(a-1)y+2bx=0$. 进行分类讨论. 当 $a=0$ 时，$y=-\frac{2b}{a-1}x$；当 $a=1$ 时，$y'=-2b$，$y=-2bx+C$；当 $a\neq 0,a\neq 1$ 时，$y'+\frac{(a-1)}{a}\cdot\frac{1}{x}y+\frac{2b}{a}=0$，即可求 y .

10.3.9　令 $u=x-t$，则 $t=x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，因此

$$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0(x-u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u,$$

因此有

$$f(x)+4x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-4\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}x^3 .$$

由上式可以看出 $f(x)$ 可导，上式两边同时对 x 求导得

$$f'(x)+4\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+4xf(x)-4xf(x)=x^2 ,$$

整理得

$$f'(x)+4\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x^2 .$$

上式两边同时再对 x 求导得 $f''(x)+4f(x)=2x$，即 $y''+4y=2x$．

对于二阶常系数齐次微分方程 $y''+4y=0$，特征方程为 $r^2+4=0$，解得 $r=\pm 2\mathrm{i}$．因此 $y''+4y=0$ 的通解为

$$y=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x) .$$

设 $y^*=ax+b$ 为 $y''+4y=2x$ 的一个特解，可以解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=0$，从而 $y^*=\frac{1}{2}x$．故方程 $y''+4y=2x$ 的通解为

$$y=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+\frac{1}{2}x .$$

由初始条件 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，解得 $C_1=0$，$C_2=-\frac{1}{4}$．因此

$$f(x)=-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{2}x .$$

10.3.10　由二阶线性非齐次微分方程解的结构，可知 $y_1-y_3=\mathrm{e}^{-x}$ 为相应齐次方程的解，$y_2-\mathrm{e}^{-x}=x\mathrm{e}^x$ 为非齐次方程的一个特解，从而 $y_1-x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{2x}$ 为相应齐次方程的解，即 $\mathrm{e}^{-x},\mathrm{e}^{2x}$ 为相应齐次方程的两个线性无关解，$x\mathrm{e}^x$ 为非齐次方程的一个特解．

解法 1　两个特征根分别为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$，齐次方程为 $y''-y'-2y=0$，即微分方程为 $y''-y'-2y=f(x)$．将特解 $y=x\mathrm{e}^x$ 代入，得

$$f(x)=(1-2x)\mathrm{e}^x ,$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)\mathrm{e}^x$．

解法 2　$y=x\mathrm{e}^x+C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 为所求方程的通解．

$$y'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+2C_1\mathrm{e}^{2x}-C_2\mathrm{e}^{-x} ,\quad y''=2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+4C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x} ,$$

三个等式消去 C_1，C_2，可得所求方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)\mathrm{e}^x$．

10.3.11　对应的齐次方程为 $y''+y'=0$，特征方程为 $\lambda^2+\lambda=0$，特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，因此齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}$．由于原方程为 $y''+y'=\mathrm{e}^{0x}(9x^2+4)$，$\lambda=0$ 为 $\lambda^2+\lambda=0$ 的单根，设原方程的特解为

$$y^*=x(b_0x^2+b_1x+b_2) ,$$

代入原方程，解得 $b_0=3, b_1=-9, b_2=22$，所以原方程的通解为

$$y=y^*+Y=(3x^2-9x+22)x+C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}\quad（C_1,C_2\text{ 为任意常数}）.$$

10.3.12　对 $f'(x)=f(1-x)$ 两边求导，得

$$f''(x)=f'(1-x)(-1)=-f(x),$$

即

$$f''(x)+f(x)=0.$$

此方程的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$（C_1,C_2 为任意常数）. 由 $f'(x)=f(1-x)$ 得 $f'(1)=f(0)$，代入通解，可得

$$-C_1\sin 1+C_2\cos 1=C_1,$$

解得 $C_2=\dfrac{C_1(1+\sin 1)}{\cos 1}$，所以

$$f(x)=C\left(\cos x+\frac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x\right)\quad（C\text{ 为任意常数}）.$$

10.3.13　$x<1$ 时，$y'-2y=2$，解得 $y=-1+C_1\mathrm{e}^{2x}$；$x>1$ 时，$y'-2y=0$，解得 $y=C_2\mathrm{e}^{2x}$. 由 $y(0)=0$，得 $C_1=1$，所以，

$$y=\begin{cases}-1+\mathrm{e}^{2x} & x<1\\ C_2\mathrm{e}^{2x} & x>1\end{cases}.$$

由 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，得 $\lim\limits_{x\to1^-}y=\lim\limits_{x\to1^+}y=y(1)$，即 $-1+\mathrm{e}^2=C_2\mathrm{e}^2=y(1)$，解得 $C_2=1-\mathrm{e}^{-2}$，$y(1)=\mathrm{e}^2-1$. 所以

$$y=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1 & x\leqslant 1\\ (1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{2x} & x>1\end{cases}.$$

10.3.14　设经过时间 t，敌舰的坐标为 $Q(1,Y)$，$P(x,y)$ 为鱼雷行进轨迹曲线上的任意一点，显然 $Y=v_0t$，$\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=v_0$. 由于鱼雷始终对准敌舰，故有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Y-y}{1-x}.$$

又知鱼雷的速度等于 $5v_0$，故

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=5v_0=5\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t},$$

即得

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=5\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}.$$

又 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{Y-y}{1-x}$，即 $Y=y+(1-x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=(1-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$$

代入得

$$\sqrt{1+(y')^2}=5(1-x)y''.$$

令 $p=y'$，上式变为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{5(1-x)}$．两边积分并整理，得

$$(1-x)^{-\frac{1}{5}}=C(p+\sqrt{1+p^2}).$$

由于 $t=0$ 时， $x=0,y=0,y'=p=0$ ，得 $C=1$，即 $(1-x)^{-\frac{1}{5}}=p+\sqrt{1+p^2}$．由

$$\sqrt{1+p^2}-p=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}+p}=(1-x)^{\frac{1}{5}}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\frac{1}{2}\left[(1-x)^{-\frac{1}{5}}-(1-x)^{\frac{1}{5}}\right],$$

积分，得

$$y=\frac{1}{2}\left[-\frac{5}{4}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{6}(1-x)^{\frac{6}{5}}\right]+C_1.$$

因为 $y\big|_{x=0}=0$，得 $C_1=\dfrac{5}{24}$，因此鱼雷的航迹曲线方程为

$$y=-\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+\frac{5}{24},$$

当 $x=1$ 时， $y=\dfrac{5}{24}$，即当敌舰航行 $\dfrac{5}{24}$ 个单位距离时，将被鱼雷击中.

第 11 章　无 穷 级 数

11.1　知 识 要 点

本章主要内容包括：数项级数的定义及性质，正项级数敛散性判别法，任意项级数敛散性判别法，幂级数的概念，幂级数的收敛半径、收敛域及和函数，初等函数的幂级数展开式，傅里叶级数的概念，函数展开成傅里叶级数等.

常数项级数主要讨论收敛性及求和，幂级数则是讨论收敛域及其和函数，由于幂级数中的变量取定值以后变成常数项级数，因此在方法和应用上两种级数是互通的；利用初等函数的幂级数展开式解题是级数的重要应用之一；数项级数敛散性的判别及求和在数学竞赛和考研试题中常出现技巧性较高的题型.

11.1.1　数项级数的定义与性质

1．数项级数的概念

若 $u_n(n=1,2,\cdots)$ 为常数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

为**常数项无穷级数**，简称**级数**，u_n 称为**通项或一般项**．$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**前 n 项部分和**，数列 $\{S_n\}$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**部分和数列**，若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，S 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**和**，如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2．级数的性质

（1）如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于和 S，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，且和为 kS（k 为常数）.

（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于和 S 与 σ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且和为 $S\pm\sigma$；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 中有一个发散，另一个收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 发散；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 中两个都发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 敛散性不定.

（3）在一个级数中加上、去掉或改变有限项，级数的敛散性不变（在收敛的情况下，级数的和一般会改变）.

（4）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这个级数的项任意添加括号后所成的级数仍然收敛，且其和不变；反之，则不一定成立.

（5）**级数收敛的必要条件**　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

11.1.2　级数敛散性的判别

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

（2）**柯西收敛准则**　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛当且仅当对于 $\forall\varepsilon>0$ ， $\exists N$ ，使得当 $n>N$ 时，对 $\forall m\in N^{+}$ ，有 $|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon$ ，其中 S_n 为级数的前 n 项部分和.

（3）正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛当且仅当其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界（或有上界）.

（4）**比较判别法**　设 $u_n\leqslant cv_n$ ，其中 c 为大于零的常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

（5）**比较判别法的极限形式**　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$.

1）当 $0<l<+\infty$ 时，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 敛散性相同；

2）当 $l=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散；

3）当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

（6）**比值判别法（达朗贝尔判别法）**　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ ，则当 $\rho<1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；当 $\rho=1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛，也可能发散，判别法失效.

（7）**根值判别法（柯西判别法）**　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ ，则当 $\rho<1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；当 $\rho=1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛，也可能发散，判别法失效.

（8）**积分判别法**　设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上非负且单调不增，记 $f(n)=u_n$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与广义积分 $\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同.

（9）**莱布尼茨判别法**　设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，$u_n>0$，若数列 $\{u_n\}$ 单调减少，且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.

（10）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且为绝对收敛.

（11）对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$，则当 $0\leqslant\rho<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；当 $\rho>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

11.1.3　三个重要的级数

（1）**几何级数**　$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$，当 $|q|<1$ 时，级数收敛，且级数的和为 $\frac{a}{1-q}$；当 $|q|\geqslant1$，级数发散.

（2）p **级数**　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$，当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $p\leqslant1$ 时，级数发散.

（3）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}=\frac{1}{2\ln^p 2}+\frac{1}{3\ln^p 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln^p n}+\cdots$，当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $p\leqslant1$ 时，级数发散.

11.1.4　函数项级数的概念

设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots,)$ 为定义在区间 I 上的函数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

为区间 I 上的**函数项级数**，若 $x_0\in I$，常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**，否则称为**发散点**．所有收敛点的集合称为**收敛域**，所有发散点的集合称为**发散域**．在收敛域上，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和是 x 的函数，记为 $S(x)$，通常称 $S(x)$ 为函数项级数的**和函数**，该函数的定义域即为级数的收敛域，因此在收敛域内有

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

若记 $S_n(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项部分和，即 $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$，则在收敛域内有 $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$.

11.1.5　幂级数的有关概念

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的函数项级数称为在 x_0 点处的**幂级数**，其中 a_n $(n=0,1,\cdots)$ 称为**幂级数的系数**，该形式称为幂级数的一般形式．当 x_0 =0 时，幂级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ，该形式称为幂级数的标准形式．

阿贝尔（Abel）定理　如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 处收敛，则在满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 处幂级数绝对收敛；反之，如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$ 处发散，则在满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 处幂级数发散．

由 Abel 定理可知，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 x 轴的正半轴上同时存在收敛点和发散点，则一定存在一个正数 R ，使得 $|x|<R$ 时，级数绝对收敛；$|x|>R$ 时，级数发散； $x=R$ 或 $x=-R$ 级数可能收敛，也可能发散．这里的 R 称为幂级数的**收敛半径**．若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛，则收敛半径 $R=0$ ，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在整个实数域上收敛， $R=+\infty$ ．

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_n\neq 0)$ ，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ ，则级数的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho} & 0<\rho<+\infty\\ +\infty & \rho=0\\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}.$$

对于幂级数的一般形式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ，级数在开区间 (x_0-R,x_0+R) 内绝对收敛，在两个端点 $x=x_0\pm R$ 上可能收敛也可能发散，在 $[x_0-R,x_0+R]$ 之外发散．

11.1.6　幂级数的和函数的性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 I ，收敛半径为 R ，和函数为 $S(x)$ ，则

（1） $S(x)$ 在收敛域 I 上连续；

（2） $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，且有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

即幂级数可以逐项求导数，新得到的幂级数的收敛半径仍为 R，但在端点处的收敛性可能会变化；

（3）$S(x)$ 在 I 上可积，且有

$$\int_{x_0}^{x} S(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

即幂级数可以逐项积分，新得到的幂级数的收敛半径仍为 R，但在端点处的收敛性可能会变化.

11.1.7　初等函数展开成 $x-x_0$ 的幂级数

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有任意阶导数，则 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在该邻域内收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

其中 $R_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒余项，$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x 与 x_0 之间．$R_n(x)$ 为拉格朗日型余项.

常用的麦克劳林级数展开式：

（1）$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots,\quad x\in(-1,1)$；

（2）$\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

（3）$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

（4）$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

（5）$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots,,\quad x\in(-1,1]$；

（6）$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,x\in(-1,1)$.

*11.1.8　函数项级数的一致收敛性及性质

1．函数项级数的一致收敛性

设有函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在一个仅仅依赖于 ε 的正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对于区间 I 上的一切 x，都有

$$|R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上**一致收敛**于和 $S(x)$，也称函数序列 $\{S_n(x)\}$ 区间 I 上**一致收敛**于 $S(x)$.

魏尔斯特拉斯定理　如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上满足（1）$|u_n(x)| \leqslant a_n$，$n=1,2,3,\cdots$，（2）正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

2．一致收敛的性质

（1）若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则 $S(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也连续.

（2）若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可以逐项积分，即

$$\int_{x_0}^{x} S(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(x)\mathrm{d}x,$$

即积分与求无穷和可以互换次序.

（3）若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$，各项 $u_n(x)$ 都有连续的导函数 $u_n'(x)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，且可以逐项求导，即

$$S'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

即求导与求无穷和可以互换次序.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R $(R>0)$，则该级数在 $(-R,R)$ 内的任一闭区间 $[a,b]$ 上一致连续．若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间的端点处收敛，则一致收敛区间可以扩展到包含端点.

*11.1.9　傅里叶级数

1．函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则称

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots)$$

为函数 $f(x)$ 的**傅里叶**（Fourier）**系数**．相应的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶**（Fourier）**级数**，即为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

2．傅里叶级数的收敛定理[狄利克雷（Dirichlet）充分条件]

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，在一个周期内至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$．若记 $C=\left\{x \,\middle|\, f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]\right\}$，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \quad x\in C .$$

若函数 $f(x)$ 仅仅在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义，并且满足收敛定理的条件，则 $f(x)$ 也可以展开成傅里叶级数. 这时利用**周期延拓**方式将 $f(x)$ 拓展为周期为 2π 的周期函数 $F(x)$，即可在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 外补充 $f(x)$ 的定义，使之成为周期函数，最后限制 $x\in(-\pi,\pi)$，此时 $F(x)\equiv f(x)$.

3．正弦函数和余弦函数

当 $f(x)$ 为奇函数时，傅里叶系数 $a_n=0$， $n=0,1,2,\cdots$， 因此奇数函数的傅里叶级数是只含有正弦项的**正弦级数** $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$.

当 $f(x)$ 为偶函数时傅里叶系数为 $b_n=0$， $n=1,2,\cdots$， 因此偶数函数的傅里叶级数是只含有余弦项的**余弦级数** $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

4．一般周期函数的傅里叶级数

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x\in C .$$

其中傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots) .$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,,\quad x\in C\,.$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)\,.$$

当 $f(x)$ 为偶函数时，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,,\quad x\in C\,.$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n=0,\,1,\,2,\cdots)\,.$$

11.2　典型例题分析

11.2.1　题型一、正项级数敛散性的判定

例 11.2.1　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^a+4^a+\cdots+(2n)^a}$ 收敛，其中 $a>1$.

分析　正项级数敛散性的判定常用的方法主要有比较判别法、比较判别法的极限形式、比值判别法、根值判别法及积分判别法等，本题可以利用比较判别法的极限形式.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{2^a+4^a+\cdots+(2n)^a}}{\dfrac{1}{(2n)^a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^a}=\frac{1}{\int_0^1 x^a\mathrm{d}x}=1+a\,,$$

当 $a>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^a}$ 收敛，故由比较判别法知，原级数收敛.

例 11.2.2　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln u_n}{\ln n}=q$，证明：当 $q<-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $q>-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

分析　条件给出的通项特征是极限形式的，故考虑去掉极限符号讨论通项，而这常又牵涉到极限与无穷小的关系.

证法 1　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln u_n}{\ln n}=q$，得 $\dfrac{\ln u_n}{\ln n}=q+\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha=0$，则 $u_n=n^{q+\alpha}$；若 $q<-1$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha=0$，得 $\exists N_1$，当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $q+\alpha<-1$，由 $p-$级数的结论，此时 $\sum\limits_{n=N_1}^{\infty}n^{q+\alpha}$ 收敛，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；若 $q>-1$，则 $\exists N_2$，当 $n\geqslant N_2$ 时，有 $q+\alpha>-1$，同理得原级数发散.

证法 2　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln u_n}{\ln n}=q$ 知，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\ln u_n}{\ln n}-q\right|<\varepsilon$，即

$$n^{q-\varepsilon}<u_n<n^{q+\varepsilon}.$$

当 $q<-1$ 时，取 ε 足够小，使得 $q+\varepsilon<-1$，由 $p-$级数的结论，此时 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}n^{q+\varepsilon}$ 收敛，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

当 $q>-1$，同理可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

注　此问题可以推广为：设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为单调递增的非负函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(u_n)}{f(n^q)}=1$，则当 $q<-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $q>-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 请读者自证.

例 11.2.3　设 $a\geqslant 1$，数列 $\{p_n\}$ 满足 $p_{n+1}\geqslant p_n>0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^a}$ 收敛.

证　当 $a=1$ 时，由 $p_{n+1}>p_n>0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=A$ 或 $+\infty$，显然 $A>0$. 设 $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{p_k-p_{k-1}}{p_kp_{k-1}}$，则

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{p_k-p_{k-1}}{p_kp_{k-1}}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_n},\quad \lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{A}\text{ 或 }\frac{1}{p_1},$$

故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}}$ 收敛. 当 $a>1$ 时，设 $u_n=\dfrac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}}$，$v_n=\dfrac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^a}$，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}v_n$ 均为正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{1}{A^{a-1}}$ 或 0，由比较判别法，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^a}$ 收敛.

例 11.2.4　设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有定义，$x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(x)$ 在某个以 $x=0$ 为中心的邻域内二阶导数连续，对 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant\left|\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}{f\left(\dfrac{1}{n}\right)}\right|$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_na_{n+1}|}$ 收敛.

分析　不等式条件易联想到比较判别法，关键是找到可以用来比较的已知敛散性的级数.

解　由于 $f(x)$ 在某个以 $x=0$ 为中心的邻域内二阶可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续、可导，又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，得 $f(0)=0,f'(0)=0$. 由麦克劳林展式有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 由于 $f(x)$ 在某个以 $x=0$ 为中心的邻域内二阶导数连续，故 $\exists M>0$，当 $|x|$ 足够小时，有 $|f''(\xi)|\leqslant M$，从而当 n 足够大时，有

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}f''(\xi)\frac{1}{n^2}\right|\leqslant\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛. 而

$$|a_{n+1}|\leqslant|a_n|\cdot\left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\right|\leqslant|a_{n-1}|\cdot\left|\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{f\left(\frac{1}{n-1}\right)}\right|\left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\right|=|a_{n-1}|\cdot\left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n-1}\right)}\right|\leqslant\cdots$$

$$\leqslant|a_1|\cdot\left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f(1)}\right|=\frac{|a_1|}{|f(1)|}\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_1|}{|f(1)|}\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|$ 收敛，由比较判别法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛；又由于

$$\sqrt{|a_na_{n+1}|}\leqslant\frac{|a_n|+|a_{n+1}|}{2},$$

根据级数收敛的性质及比较判别法可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_na_{n+1}|}$ 收敛.

例 11.2.5　设 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 1 的连续函数，且 $\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x=0$，$f(x)$ 有连续的导数，令 $a_n=\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

证　连续函数在相应区间上有界，故 $\exists M_1>0, M_2>0$，使得

$$|f'(x)|\leqslant M_1, \forall x\in(0,1),\quad |\varphi(x)|\leqslant M_2, \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

又因为

$$a_n=\left[\frac{1}{n}f(x)\int_0^{nx}g(t)\mathrm{d}t\right]_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\left(f'(x)\int_0^{nx}g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=0-\frac{1}{n}\int_0^1\left(f'(x)\int_0^{nx}g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,$$

故

$$|a_n|\leqslant\frac{M_1}{n}\left|\int_0^1\left(\int_0^{nx}\phi(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{M_1}{n}\left|\int_0^1\left(\int_0^{[nx]}\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_{[nx]}^{nx}\varphi(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{M_1}{n}\left|\int_0^1\left(\int_{[nx]}^{nx}\phi(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M_1M_2}{n}.$$

从而 $a_n^2\leqslant\frac{(M_1M_2)^2}{n^2}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(M_1M_2)^2}{n^2}$ 收敛，由比较判别法可知，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

例 11.2.6　设 $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，已知 $x>0$，求 x 的范围使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{u_n}$ 收敛.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)=c$， $c\approx 0.5772$ 为欧拉常数，则

$$u_n=\ln n+c+\alpha_n,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{u_n}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{\ln n+c+\alpha_n}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{\ln n+c+\alpha_n}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{c+\alpha_n}n^{\ln x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{c+\alpha_n}}{n^{\ln\frac{1}{x}}}.$$

当 $\ln\dfrac{1}{x}>1$，即 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\ln\frac{1}{x}}}$ 收敛，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^{c+\alpha_n}}{n^{\ln\frac{1}{x}}}}{\dfrac{1}{n^{\ln\frac{1}{x}}}}=\lim_{n\to\infty}x^{c+\alpha_n}=x^c,$$

由比较判别法的极限形式可知原级数收敛.

***例 11.2.7**　【2010 年全国竞赛预赛题】设 $a_n>0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明：

（1）当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛；

（2）当 $\alpha\leqslant 1$ 且 $S_n\to\infty\ (n\to\infty)$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

证法 1　（1）由 $a_n>0$ 知 $\{S_n\}$ 为单调递增数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 或 $+\infty$，其中 $S>0$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n/S_n^{\alpha}}{a_n}=\dfrac{1}{S^{\alpha}}$，由比较判别法的极限形式可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛；

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，通项 $\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}=\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{\alpha}}$，考虑不等式 $\dfrac{1}{S_n^{\alpha}}\leqslant\dfrac{1}{x^{\alpha}}\leqslant\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha}}$，由

$$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{\alpha}}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^{\alpha}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x,$$

得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}\leqslant\int_{S_1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$，而积分 $\int_{S_1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛.

（2）当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，由 $\dfrac{1}{x^{\alpha}}\leqslant\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha}}$，得

$$\frac{a_n}{S_{n-1}^{\alpha}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}^{\alpha}}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha}}\mathrm{d}x\geqslant\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_{n-1}^{\alpha}}\geqslant\int_{S_1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$．因为积分 $\int_{S_1}^{+\infty}\dfrac{1}{x_n^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_{n-1}^{\alpha}}$ 发散．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{S_n}=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_{n-1}^{\alpha}}$ 同发散；若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\neq 1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)S_n^{1-\alpha}\neq 0,$$

从而原级数发散．

当 $\alpha\leqslant 0$ 时，由不等式 $\dfrac{1}{x_n^{\alpha}}\leqslant\dfrac{1}{S_n^{\alpha}}$，得

$$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{\alpha}}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^{\alpha}}\mathrm{d}x\geqslant\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x,$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}\geqslant\int_{S_1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$，因为积分 $\int_{S_1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 发散，所以原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

证法 2　（1）由 $a_n>0$ 知 $\{S_n\}$ 为单调递增数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 或 $+\infty$，其中 $S>0$；由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}-\frac{S_{n-1}}{S_n^{\alpha}}\right),$$

考虑以 $\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}$ 为通项的级数，以及函数 $f(x)=x^{1-\alpha}$，在区间 $[S_{n-1},S_n]$ 上由拉格朗日中值定理，有

$$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}(S_n-S_{n-1}),$$

这里 ξ 介于 S_{n-1} 与 S_n 之间，则

$$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\xi^{-\alpha}(S_n-S_{n-1})>(\alpha-1)\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{\alpha}}.$$

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$，其部分和为

$$T_n=\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)=\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha-1}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\dfrac{1}{a_1^{\alpha-1}}$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$ 收敛，由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha-1)\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{\alpha}}$ 收敛，从而原级数收敛.

（2）当 $\alpha\leqslant 1$ 时，先考虑 $\alpha=1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，则对 $\forall n$，$\exists k\in\mathbf{N}^{+}$，有 $\dfrac{S_n}{S_{n+k}}<\dfrac{1}{2}$，故

$$\sum_{k=n+1}^{n+k}\frac{a_k}{S_k}=\sum_{k=n+1}^{n+k}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k}\geqslant\sum_{k=n+1}^{n+k}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_{n+k}}=\frac{S_{n+k}-S_n}{S_{n+k}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

由柯西收敛准则，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散；

当 $\alpha<1$ 时，$\frac{a_n}{S_n}<\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$，由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散，从而当 $\alpha\leqslant 1$ 时，原级数发散.

注　当通项中出现 a_n 与 S_n，一般会利用关系 $a_n=S_n-S_{n-1}$，再结合问题中 $\{S_n\}$ 的单调递增，两种方法从不同的角度构建了比较判别法的适用条件，特别是证法 2，使用拉格朗日中值定理是对理论掌握和善于联想相结合的有力表现.

例 11.2.8　判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 的收敛性.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n},$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 x}{x}}}{\ln x}=0,$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=0$，由根值判别法，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

例 11.2.9　【2013 年北京市竞赛题】判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 的收敛性，其中 $x>0$.

解　记 $a_n=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$，由于 $x>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 为正项级数．由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)(1+x^{n+1})}\frac{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}{x^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x, & 0<x<1\\0, & x>1\\\frac{1}{2}, & x=1\end{cases},\end{aligned}$$

由比值判别法，原级数收敛.

注　通项 a_n 也可变形为

$$a_n=\frac{1+x^n-1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})}-\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)},$$

利用部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限讨论级数的敛散性.

例 11.2.10　【2010 年北京市竞赛题】令 $a_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k}e^{-kx^2}dx\ (k=1,2,\cdots)$，讨论级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 的敛散性.

分析　由 a_k 的表达式，易联想到函数 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 及其性质 $\Gamma(s+1)=\Gamma(s)$.

解法 1　由于

$$
\begin{aligned}
a_k&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-1}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}kx^2\\
&=\frac{1}{2k^{k+\frac12}}\int_{-\infty}^{+\infty}(kx^2)^{\frac{2k+1}{2}-1}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}(kx^2)=\frac{1}{k^{k+\frac12}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{2k+1}{2}-1}\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{k^{k+\frac12}}\Gamma\left(k+\frac12\right),
\end{aligned}
$$

因此

$$
\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\Gamma\left(k+1+\frac12\right)}{(k+1)^{k+1+\frac12}}\frac{k^{k+\frac12}}{\Gamma\left(k+\frac12\right)}=\frac{k+\frac12}{\left(1+\frac1k\right)^{k+\frac12}(k+1)}，\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1，
$$

由比值判别法可知原级数收敛.

解法 2　由于

$$
\begin{aligned}
a_k&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2k}x^{2k-1}\mathrm{e}^{-kx^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2k-1}{2k}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-2}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x\\
&=0+\frac{2k-1}{2k}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-2}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x=-\frac{2k-1}{(2k)^2}x^{2k-3}\mathrm{e}^{-kx^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-4}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k-4}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

依次可得

$$
a_k=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1}{(2k)^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x=\frac{(2k-1)!!}{(2k)^k}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}，
$$

故

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)^{k+1}}\frac{(2k)^k}{(2k-1)!!}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2k+1}{2k+2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1，
$$

由比值判别法可知原级数收敛.

11.2.2　题型二、任意项级数敛散性的判定

例 11.2.11　设函数 $\varphi(x)$ 当 x 充分大时可以展开成 $\varphi(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots$，其中 $\{a_n\}$ 为有界数列，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 收敛当且仅当 $a_0=a_1=0$.

证　必要性　设$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=\lim_{n\to\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^n}+\cdots\right)=0.$$

由$\{a_n\}$有界，即$\exists M>0$，对任意的n，有$|a_n|\leqslant M$，则

$$\left|\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^n}+\cdots\right|\leqslant M\frac{1/n}{1-1/n}=\frac{M}{n-1},$$

从而$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^n}+\cdots\right)=0$，故$a_0=0$．此时

$$\varphi(n)=\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^n}+\cdots.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^n}+\cdots}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(a_1+\frac{a_2}{n}+\cdots+\frac{a_n}{n^{n-1}}+\cdots\right),$$

类似上述讨论，此时有$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_2}{n}+\cdots+\frac{a_n}{n^{n-1}}+\cdots\right)=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^n}+\cdots}{\frac{1}{n}}=a_1.$$

若$a_1\neq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$同发散，矛盾，所以必有$a_1=0$.

充分性　设$a_0=a_1=0$，则当$n\geqslant 2$时，

$$|\varphi(n)|=\left|\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^n}+\cdots\right|\leqslant M\frac{1/n^2}{1-1/n}\leqslant\frac{2M}{n^2},$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2}$收敛，由比较判别法可知，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$收敛.

例 11.2.12　【2000 年北京市竞赛题】设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在$x=0$的某邻域内有一阶连续导数，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$发散.

分析　交错级数常考虑莱布尼茨法则，涉及通项绝对值的单调性，题中条件$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$提示可以讨论$f(x)$的导数，从而根据导数的符号确定函数的单调性，以$f\left(\frac{1}{n}\right)$为通项的级数易想到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

证　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$．又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导，从而连续，故有 $f(0)=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=a>0 .$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内导数连续，故当 $|x|$ 足够小时，有 $f'(x)>0$，则当 n 足够大时数列 $\left\{f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 单调递减，又 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$，故由莱布尼茨法则，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=a>0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由比较判别法的极限形式可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

例 11.2.13　指出 k 取何值时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^k}{n-\sqrt{n}}$ 条件收敛.

解　由于当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{n^k}{n-\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{1-k}-n^{\frac{1}{2}-k}}\sim\frac{1}{n^{1-k}} ,$$

故当 $1-k>1$，即 $k<0$ 时，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^k}{n-\sqrt{n}}$ 绝对收敛；当 $k>1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{n^k}{n-\sqrt{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-k}}=+\infty ;$$

当 $k=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n^k}{n-\sqrt{n}}\right|=1$．故当 $k\geqslant 1$ 时，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^k}{n-\sqrt{n}}$ 发散；当 $0\leqslant k<1$ 时，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1-k}}$ 发散，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^k}{n-\sqrt{n}}$ 发散.

下面考虑交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^k}{n-\sqrt{n}}$ 的敛散性．当 $0\leqslant k<1$ 时，设 $f(x)=\dfrac{x^k}{x-\sqrt{x}}$，当 $x>1$ 时，由于

$$f'(x)=\frac{x^k[2(k-1)\sqrt{x}+1-2k]}{2\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}<0 ,$$

因此函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，从而 $\left\{u_n=\dfrac{n^k}{n-\sqrt{n}}\right\}$ 单调递减；而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-k}}=0 ,$$

由莱布尼茨法则可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^k}{n-\sqrt{n}}$ 收敛，且条件收敛．综上，当 $0\leqslant k<1$ 时，原级数条件收敛.

例 11.2.14　设 $a_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{1+x^p}\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots),\ p>0$，证明：

（1） $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛；（2） $0<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

证　（1）由于

$$|a_n|\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n^p},$$

因此 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故原级数绝对收敛；

（2）根据积分中值定理，有

$$a_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{1+x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi_n^p}\int_n^{n+1}\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^n}{\pi(1+\xi_n^p)},$$

这里 ξ_n 位于 n 与 $n+1$ 之间，又由 $0<p\leqslant 1$，得

$$\frac{2}{\pi[1+(n+1)^p]}<\frac{2}{\pi(1+\xi_n^p)},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi[1+(n+1)^p]}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(1+\xi_n^p)}$ 发散；又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi(1+\xi_n^p)}=0,\qquad \frac{2}{\pi(1+\xi_{n+1}^p)}<\frac{2}{\pi(1+\xi_n^p)},$$

由莱布尼茨法则知原级数收敛，从而为条件收敛.

注　通项中出现积分形式时，根据情况常考虑放缩法得到容易积分的形式，或者利用积分中值定理去掉积分符号再讨论通项.

11.2.3　题型三、函数项级数收敛域的求解

例 11.2.15　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\ln x)^{n+1}}{(\ln x)^n}\right|=|\ln x|,$$

所以当 $|\ln x|<1$，即 $\frac{1}{\mathrm{e}}<x<\mathrm{e}$ 时，级数绝对收敛；当 $|\ln x|>1$，即 $x>\mathrm{e}$ 或 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数发散；当 $x=\mathrm{e}$，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$，当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，根据级数收敛的必要条件知，级数发散．故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域是 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$.

例 11.2.16　试求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

解　记 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}}{\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,$$

当 $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|<1$，即 $x>0$ 时，级数绝对收敛；当 $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|>1$，即 $x<0$ 时，级数发散；当 $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|=1$，即 $x=0$ 时，级数化为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$，由莱布尼茨定理可知，级数收敛，因此原级数的收敛域为 $[0,+\infty)$.

11.2.4　题型四、级数收敛充要条件的应用

级数收敛的常用充要条件有级数收敛的定义（部分和有极限）、柯西充要条件等，当采用数项级数敛散性判定的典型方法有困难时，可考虑这些充要条件.

例 11.2.17　【1997 年北京市竞赛题】已知数列 $\{u_n\}$ 为单调递增的正数列，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 收敛当且仅当数列 $\{u_n\}$ 有界.

分析　通项 u_n 没有给出具体表达式，比较适合于采用前 n 项部分和数列来讨论.

证　必要性　假设 $\{u_n\}$ 无界，由于 $\{u_n\}$ 单调递增，故对 $\forall m$，$\exists n$，$n>m$ 时，有 $u_n>2u_m$，则

$$S_{n-1}-S_{m-1}=\sum_{k=m}^{n-1}\left(1-\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)\geqslant\frac{u_n-u_m}{u_n}\geqslant\frac{1}{2},$$

由柯西收敛准则知 $\{S_n\}$ 发散，从而原级数发散，矛盾，故 $\{u_n\}$ 有界.

充分性　由于 $\{u_n\}$ 有界，即 $\exists M$，对 $\forall n$，有 $u_n<M$；又 $\{u_n\}$ 单调递增，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 是正项级数，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)\leqslant\frac{u_n-u_1}{u_1}\leqslant\frac{M-u_1}{u_1},$$

$\{S_n\}$ 有上界，原级数收敛.

例 11.2.18　讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}\ (p>0)$ 的敛散性.

分析　虽为交错级数，但通项数列非单调，所以不适合莱布尼茨法则，考虑部分和 S_n.

解　通项 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}$，部分和

$$\begin{aligned}S_{2n}&=-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{2^p}-\frac{1}{5^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots-\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n)^p}\\&=\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n+1)^p}\right)\\&=\frac{1}{2^p}-\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)-\left[\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right]-\frac{1}{(2n+1)^p}<\frac{1}{2^p},\end{aligned}$$

故数列$\{S_{2n}\}$单调递增有上界，从而有极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\left[n+(-1)^n\right]^p}=S,$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，即原级数收敛.

注　从该问题的解答过程易得到一个收敛级数的基本结论，即收敛级数交换相邻两项后所得新的级数仍收敛，且其和不变.

例 11.2.19　设$a_{2n-1}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，$a_{2n}=\dfrac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$的敛散性.

解　部分和

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}\right],$$

当$n\to\infty$时，由

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2},$$

可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}\right]$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$同收敛，所以$S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{1}{k}\right]$有极限．设$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[S_{2n}+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]=S+0=S,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，即原级数收敛.

例 11.2.20　【1999 年北京市竞赛题】设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的各项$u_n>0$，$n=1,2,\cdots$，$\{v_n\}$为一正实数列，记$a_n=\dfrac{u_nv_n}{u_{n+1}}-v_{n+1}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且$a$为有限正数或正无穷，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

解　由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ (a>0或+\infty)$知，$\exists N>0$，当$n\geqslant N$时，有

$$a_n>m,\ m=\begin{cases}\dfrac{a}{2} & a<+\infty\\1 & a=+\infty\end{cases},$$

又因为$u_n>0$，故当$n\geqslant N$时，由$a_n=\dfrac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{u_{n+1}}$，得

$$u_{n+1} = \frac{u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}}{m},$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{N+n}$ 的部分和 S_n 满足

$$S_n = u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_{N+n} \leqslant \frac{u_N v_N - u_{N+n} v_{N+n}}{m} \leqslant \frac{u_N v_N}{m},$$

即 $\{S_n\}$ 有上界，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{N+n}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 11.2.21 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，试证 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k = 0$.

证 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，令 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n+1} = S .$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} [-S_1 - S_2 - S_{n-1} - S_n + (n+1) S_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(S_n - \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n+1} \right) = 0.\end{aligned}$$

例 11.2.22 【1992 年北京市竞赛题】设 $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ ，证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛，并求其和.

分析 直接求 $f(x)$ 的各阶导数，显然烦琐得难以进行下去，故考虑对关于 $f(x)$ 等式的变形，目的是消除分式.

解 令 $F(x) = (1-x-x^2) f(x)$ ，则 $F(x) = 1$ ，应用莱布尼茨公式，两边求 $(n+2)$ 阶导数，有

$$F^{(n+2)}(x) = -2C_{n+2}^2 f^{(n)}(x) + (-1-2x) C_{n+2}^1 f^{(n+1)}(x) + (1-x-x^2) C_{n+2}^0 f^{(n+2)}(x) = 0,$$

令 $x = 0$ ，得

$$F^{(n+2)}(x) = -2n! C_{n+2}^2 a_n - (n+1)! C_{n+2}^1 a_{n+1} + (n+2)! C_{n+2}^0 a_{n+2} = 0,$$

化简为 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ，又

$$a_0 = \frac{1}{0!} f(0) = 1,\ a_1 = \frac{1}{1!} f'(0) = \left. \frac{-(-1-2x)}{(1-x-x^2)^2} \right|_{x=0} = 1,$$

得 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 原级数的部分和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k a_{k+2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+2} - a_k}{a_k a_{k+2}} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+2}} \right) = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}},$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$，即原级数收敛，其和为 2.

例 11.2.23　设数列$\{u_n\}$单调，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，试证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(u_n^2 - u_{n+1}^2)$收敛.

分析　题设未给出级数通项的具体表达式，但给出了一些基本函数特性，适于考虑应用收敛级数判定的充要条件.

证　由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，得$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，又由数列$\{u_n\}$单调，得$\{u_n\}$非正、单调递增趋向于零或非负、单调递减趋向于零，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛，且$\{u_n^2\}$单调递减趋向于零.

令$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(u_k^2 - u_{k+1}^2)$，则

$$S_n = (u_1^2 - u_2^2) + 2(u_2^2 - u_3^2) + \cdots + n(u_n^2 - u_{n+1}^2) = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 - n u_{n+1}^2 .$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛，设其前$n$项部分和为$T_n$，由柯西收敛准则得

$$\lim_{n\to\infty}(T_{2n} - T_n) = \lim_{n\to\infty}(u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + \cdots + u_{2n}^2) = 0 .$$

而

$$u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + \cdots + u_{2n}^2 \geqslant n u_{2n}^2 ,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} 2n u_{2n}^2 = 0$；类似可得$\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)u_{2n-1}^2 = 0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty} n u_n^2 = 0$，进而$\lim\limits_{n\to\infty} n u_{n+1}^2 = 0$，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2$有极限，从而$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(u_n^2 - u_{n+1}^2)$收敛.

例 11.2.24　设$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(1+n)$，证明数列$\{x_n\}$收敛.

证　$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(1+n)$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left[\ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$，由于当$n\to\infty$时，

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2},$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，从而其部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)=x_n$$

有极限，可知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

11.2.5　题型五、求解数项级数的和

数项级数求和的问题，一种方法是仅仅涉及数项级数的知识，一般先考察数项级数的收敛性，然后求其和；另一种方法是根据数项级数的特点，构造幂级数，利用幂级数的和函数来求解数项级数的和，具体可以参见本章题型七.

例 11.2.25　【2010 年北京市竞赛题】求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)\right]}{(\ln n^n)[\ln(n+1)^{n+1}]}$ 的和.

解　由于

$$u_n=\frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)\right]}{(\ln n^n)[\ln(n+1)^{n+1}]}=\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{(n\ln n)[(n+1)\ln(n+1)]}$$
$$=\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

因此

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

故级数的和为

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{\ln(n+1)^{n+1}}\right]=\frac{1}{2\ln 2}.$$

例 11.2.26　【2001 年北京市竞赛题】设 m 为大于1的正整数，a_n 为 $(1+x)^{n+m}$ 中 x^n 的系数，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛，并求其和.

解　由于

$$a_n=C_{n+m}^{n}=\frac{(n+1)\cdots(n+m)}{m!},$$

因此当 $m>1$ 时，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}=m!\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)}$. 由于

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\cdots(k+m)}=\frac{1}{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{(k+1)\cdots(k+m-1)}-\frac{1}{(k+2)\cdots(k+m)}\right]$$
$$=\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-1)}-\frac{1}{(n+1)\cdots(n+m-1)}\right],$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{(m-1)(m-1)!}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{m!}{(m-1)(m-1)!} = \dfrac{m}{m-1}$.

注　此题中对通项的拆分方法对于部分和化简是很有用的.

例 11.2.27　【2007 年北京市竞赛题】设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，其和为 S，试求：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$.

解　（1）记 $S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$，由于

$$\begin{aligned}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} &= \frac{S_n+S_n-S_1+S_n-S_2+\cdots+S_n-S_{n-1}}{n}\\ &= S_n - \frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n}\\ &= S_n - \frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n},\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = S-S=0.$$

（2）由于

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)} = \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} - \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n+(n+1)a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1},$$

记 $b_n = \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$，则

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)} = b_n - b_{n+1} + a_{n+1}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$ 的前 W_n 部分和为 $W_n = b_1 - b_{n+1} + \sum\limits_{k=2}^{n+1} a_k$，故

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} W_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n+1} a_k\\ &= b_1 + \lim_{n\to\infty}(S_n - a_1) = b_1 + S - a_1 = S.\end{aligned}$$

***例 11.2.28**　【2013 年全国竞赛预赛题】判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和.

解　由于

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n} < 1+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1+\ln n,$$

因此当 $n>4$ 时，有

$$1+\ln n<\sqrt{n}\text{，}\quad \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}\text{，}$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}$收敛，由比较判别法可知，原级数收敛.

记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{a_n}{n+2}\\&=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)-\frac{a_n}{n+2}=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2},\end{aligned}$$

由于$0<a_n<1+\ln n$，有$0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$，故级数的和$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

***例 11.2.29**　【2014 年全国竞赛决赛题】设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 1，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，且$\lim\limits_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$，证明：级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛且$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

分析　考虑当$n\to\infty$时，$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-A\right|$能否任意小，由已知$x\to 1^-$时，$\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-A\right|$能任意小，因此结合收敛半径为 1 和$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$的条件，合理利用绝对值不等式的性质来求解.

解　由$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}=0$，故对任意的$\varepsilon>0,\exists N_1>0$，当$n>N_1$时，有

$$0\leqslant\frac{\sum_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又$\lim\limits_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$，故$\exists\delta>0$，当$1-\delta<x<1$时，有

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现取$N_2>0$，使得当$n>N_2$时，$\frac{1}{n}<\delta$，则$1-\delta<1-\frac{1}{n}<1$，令$x=1-\frac{1}{n}$，有

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-A\right|<\frac{\varepsilon}{3};$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-A\right|&=\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-A\right|\\&\leqslant\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|+\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-A\right|,\end{aligned}$$

取 $x=1-\dfrac{1}{n}$，则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right|&=\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\right|\\&\leqslant\left|\sum_{k=0}^{n}ka_k(1-x)\right|=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}k\,|a_k|}{n}<\frac{\varepsilon}{3};\end{aligned}$$

且

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\,|a_k|\,x^k<\frac{\varepsilon}{3n}\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k\leqslant\frac{\varepsilon}{3n}\frac{1}{1-x}=\frac{\varepsilon}{3n\cdot\dfrac{1}{n}}=\frac{\varepsilon}{3};$$

故

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-A\right|\leqslant\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|+\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-A\right|<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

例 11.2.30 判定级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n(2n+1)}$ 的收敛性，若收敛，求其和.

解 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=-\ln(1+1)=-\ln 2$，该级数加括号后成为 $-1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{(2n+1)}\right]$ 也收敛于 $-\ln 2$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n+1)}\right],$$

所以原级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n(2n+1)}$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n(2n+1)}=1-\ln 2$.

11.2.6 题型六、幂级数收敛半径及收敛域的求解

例 11.2.31 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}(x+1)^n$ 的收敛域.

分析 易见 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 与 n 的奇偶有关，极限不存在，此方法求收敛半径不合适，考虑用根值法求半径.

解　由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2},$$

可得收敛半径为 2，因此当 $|x+1|<2$，即 $x\in(-3,1)$ 时，幂级数收敛， $x=-3$ 与 $x=1$ 显然为级数的收敛点，故原级数的收敛域为 $[-3,1]$.

注　求收敛半径时，也可考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}(x+1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x+1)^n,$$

右边两个级数的收敛半径均为 2，收敛区间均为 $(-3,1)$，故原级数的收敛区间为这两个收敛区间的交集，即 $(-3,1)$.

例 11.2.32　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n\ln(n^a+1)}$ $(a>0)$ 的收敛域.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln[(n+1)^a+1]}{n\ln(n^a+1)}=1,$$

因此收敛半径为 $R=1$. 当 $x=-1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n^a+1)}$ ，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n\ln(n^a+1)}}{\dfrac{1}{an\ln n}}=1,$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{an\ln^p n}$ 当 $p\leqslant 1$ 时发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{an\ln n}$ 发散，由比较判别法的极限形式可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n^a+1)}$ 发散，所以 $x=-1$ 为发散点；当 $x=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n^a+1)}$ 为交错级数，由莱布尼茨法则易知级数收敛. 原级数的收敛域为 $(-1,1]$.

例 11.2.33　【2004 年北京市竞赛题】求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]x^n$ 的收敛域.

解　当 $n\to\infty$ 时，

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因此

$$1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2n}}{\dfrac{1}{2(n+1)}}=1$，从而收敛半径为 1. 当 $x=-1$ 时，原级数与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n}$ 同收敛，当 $x=1$ 时，原级数与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 同发散，故原级数的收敛域为 $[-1,1]$.

11.2.7　题型七、求解幂级数的和函数

幂级数求和问题常用方法：通项进行初等变形后，对部分和函数求极限得所求和函数；对通项进行初等变形、逐项积分或逐项求导后所得的新的级数是一些常见的基本初等函数的幂级数展开形式，再由题意辅以相应方法求得.

例 11.2.34　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

解　设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n},$$

其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad (-1,1).$$

下面求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ 的和函数，记

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

由于

$$[xg(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},$$

因此

$$xg(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又由于 $g(0)=0$，故

$$g(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & -1<x<1,x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases},$$

所以

$$S(x)=g(x)-\frac{x^2}{1-x^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2} & -1<x<1,x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

注　由几何级数的和函数公式 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}(|x|<1)$ 出发，经过逐项求导、逐项积分、换元及加减法等运算，可以求出某些幂级数的和函数．需要注意的是，通过逐项求导、逐项积分后得到幂级数，其收敛半径不变，但收敛域可能变化，即新得到的幂级数在端点处的收敛性可能会变化．

例 11.2.35　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的和函数.

解　设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ ，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n]^n x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}3^{2n}x^{2n-1}=\frac{1}{1-x^2}+\frac{9x}{1-9x^2}\quad\left(|x|<\frac{1}{3}\right),$$

因此

$$S(x)=S(0)+\int_0^x\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{9t}{1-9t^2}\right)\mathrm{d}t=\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\ln(1-9x^2)=\ln\frac{1+x}{(1-x)\sqrt{1-9x^2}}.$$

当 $x=\frac{1}{3}$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{[2+(-1)^n]^n}{n3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{3},$$

上述极限不存在，故 $x=\frac{1}{3}$ 为发散点；同理可得，$x=-\frac{1}{3}$ 为发散点，收敛域为 $|x|<\frac{1}{3}$. 故幂级数的和函数为

$$S(x)=\ln\frac{1+x}{(1-x)\sqrt{1-9x^2}},\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

例 11.2.36　【2011 年全国竞赛预赛题】求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

解　令 $t=x^2$，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}\frac{2^{n+1}}{2n+1}=2$，$t=1$ 为发散点，故原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，由于

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}=\frac{x}{2-x^2},$$

因此

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}.$$

例 11.2.37　求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ 的和.

解　记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，由于

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},|x|<1,$$

因此

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4.$$

注　本题中把级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 视为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$ 时所得的数项级数，通过求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S(x_0)$，这是求解常数项级数的和的常用方法.

例 11.2.38　设 $a_1=1,a_2=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\quad(n\geqslant 2)$，求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径及和函数.

解　由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}},$$

记 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则 $b_n\geqslant 1$，又 $b_n=1+\frac{1}{b_{n-1}}$，可得

$$b_{n+1}-b_n=-\frac{1}{b_n}(b_n^2-b_n-1),\quad 1\leqslant b_n\leqslant 2.$$

又因为当 $1\leqslant b_n\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$b_{n+1}-b_n>0$，即 $b_{n+1}>b_n$；当 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqslant b_n\leqslant 2$ 时，$b_{n+1}-b_n<0$，即 $b_{n+1}<b_n$，因此根据单调有界准则可知 $\lim_{n\to\infty}b_n$ 存在．设 $b=\lim_{n\to\infty}b_n$，则

$$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}(b_n^2-b_n-1),$$

从而 $b^2-b-1=0$，因为 $b_n\geqslant 1$，所以 $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，从而原级数的收敛半径为 $\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则

$$\begin{aligned}S(x)&=a_1x+a_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^n=a_1x+a_2x^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2}x^{n+2}\\&=a_1x+a_2x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)x^{n+2}\\&=a_1x+a_2x^2+x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\\&=x+x^2+x[S(x)-x]+x^2S(x),\end{aligned}$$

解得

$$S(x)=\frac{x}{1-x-x^2},\quad x\in\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

例 11.2.39　【2001 年北京市竞赛题】求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$ 的收敛区间及和函数.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(n+1)!}{n^3(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3(n+2)}=0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$. 令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$，则当 $x\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n^2-n^2-n+n+1-1}{(n+1)!}(-x)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(n+1)-n(n+1)+(n+1)}{(n+1)!}(-x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-x)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-n+1}{n!}(-x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-x)^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(-x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-x)^n\\&=x^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\\&=x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\\&=x^2\cdot e^{-x}+e^{-x}+\frac{1}{x}(e^{-x}-1)=e^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x},\end{aligned}$$

显然 $S(0)=0$，故

$$S(x)=\begin{cases} e^{-x}\left(x^2+1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

***例 11.2.40**　【2009 年全国竞赛预赛题】已知函数列 $\{u_n(x)\}$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$，（$n$ 为正整数），且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数.

解　$u_n'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$ 为 $u_n(x)$ 的一阶线性非齐次微分方程，得

$$u_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^x e^{-\int dx}dx+C\right)=\frac{1}{n}x^n e^x+Ce^x,$$

由 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，得 $C=0$，故 $u_n(x)=\dfrac{1}{n}x^n e^x\ (n=1,2,\cdots)$，从而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-e^x\ln(1-x),\ \ x\in[-1,1).$$

例 11.2.41　【2005 年北京市竞赛试题】 已知 $a_1=\dfrac{1}{2}$，当 $n\geqslant 2$ 时，$na_n=\left[\dfrac{1}{2}+(n-1)\right]a_{n-1}$，证明当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，并求其和函数.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\dfrac{1}{2}+n\right)a_n}{(n+1)a_n}\right|=1,$$

因此幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$，故当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$. 由于

$$\begin{aligned} S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n x^{n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2}+(n-1)\right]a_{n-1}x^{n-1}\\ &=a_1+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-1}\\ &=a_1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n\\ &=a_1+\frac{1}{2}S(x)+xS'(x), \end{aligned}$$

即 $S(x)$ 满足一阶线性非齐次微分方程

$$S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S(x)=\frac{1}{2(1-x)},$$

且 $S(0)=0$，解得 $S(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-1$， $x\in(-1,1)$.

11.2.8　题型八、函数的幂级数展开

应用幂级数展开式解决问题的一个关键前提是对一些常见初等函数的幂级数展开式非常熟悉，应用时才易找到突破口.

例 11.2.42　将函数 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处展开成泰勒级数.

解　当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，

$$\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

而

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4-\cdots,$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5-\cdots,$$

所以

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)^5-\cdots\right],\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 11.2.43　求函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 关于 x 的幂级数展开式中 x^{13} 的系数.

解　由于

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(|x|<1),$$

则

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(|x|<1),$$

而 $f(0)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，故

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(|x|<1),$$

从而展开式中 x^{13} 的系数为 $\dfrac{(-1)^6}{13}=\dfrac{1}{13}$.

例 11.2.44　设 $f_0(x)=\mathrm{e}^x, f_{n+1}(x)=f_n'(x)x\ (n\geqslant 0)$，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f_n(1)}{n!}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$.

解　由于 $f_0(x)=\mathrm{e}^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$，因此

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k!}\cdot x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kx^k}{k!}.$$

假设 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^n x^k}{k!}$，则

$$f_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{n+1}x^{k-1}}{k!}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{n+1}x^k}{k!},$$

由数学归纳法可知，$f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^n x^k}{k!}$．故 $f_n(1)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^n}{k!}$，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{k^n}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^k}{k!}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}.$$

例 11.2.45　设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}, 0<x<1$.

（1）证明 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\dfrac{\pi^2}{6}$；

（2）计算 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

解　（1）设 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$，则

$$F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln x}{x-1}.$$

由题意知

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},\quad f'(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n},$$

而根据麦克劳林展开式有

$$\frac{\ln(1-x)}{x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},\quad \frac{\ln x}{x-1}=\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n},$$

故 $F'(x)=0$，从而对于 $\forall x\in(0,1)$，有 $F(x)\equiv C$．又

$$f(0)=0,\quad f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x\ln(1-x)=\lim_{x\to 0^+}(-x\ln x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 在 $x=1$ 处收敛，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续，$f(1-x)$ 在 $x=0$ 处右连续，可知 $F(x)$ 在 $x=0$ 处右连续．故

$$\lim_{x\to 0^+} F(x)=C=0+\frac{\pi^2}{6}+0=\frac{\pi^2}{6},$$

解得 $C=\dfrac{\pi^2}{6}$，因此

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}.$$

（2）令 $t=2-x$，则

$$I=-\int_1^2\frac{\ln(2-t)}{t}\mathrm{d}t=-\int_1^2\frac{1}{t}\left[\ln 2+\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\ln^2 2-\int_1^2\frac{1}{t}\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=-\ln^2 2+\int_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n2^n}\mathrm{d}t$$

$$=-\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2 2^n}\right)=-\ln^2 2+\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n},$$

由（1）知，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}$，故

$$I=-\ln^2 2+\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}.$$

例 11.2.46　【2002 年北京市竞赛题】设函数 $z(k)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}\mathrm{e}^{-1}$，

（1）求 $z(0)$，$z(1)$ 和 $z(2)$ 之值；

（2）试证当 k 取正整数时，$z(k)$ 亦为正整数.

解　（1）由题意，有

$$z(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}=1,$$

$$z(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}=1,$$

$$z(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\mathrm{e}^{-1}\cdot(\mathrm{e}+\mathrm{e})=2.$$

（2）由（1）可知，$z(0)$，$z(1)$ 和 $z(2)$ 为正整数，假设 $z(0),z(1),\cdots,z(k-1)$ $(k>2)$ 均为正整数，则

$$z(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}\mathrm{e}^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{k-1}}{n!}\mathrm{e}^{-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^{i}n^i}{n!}\mathrm{e}^{-1}=\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^i}{n!}\mathrm{e}^{-1}=\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^{i}z(i),$$

由于 C_{k-1}^{i} ,$z(i)$ $(i=0,1,\cdots,k-1)$ 均为正整数，所以 $z(k)$ 也是正整数，结论得证.

*11.2.9　题型九、傅里叶级数的相关问题

例 11.2.47　利用 $f(x)=|x|,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 的傅里叶展开，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

解　$f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足狄利克雷条件，且 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，故其傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{-4}{n^2\pi} & n=2k-1\end{cases}\ (k=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

故

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)\quad(|x|\leqslant\pi).$$

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，有

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots,$$

记 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$，则

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}\cdots=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots\right)=\frac{S}{4},$$

故 $S-\frac{1}{4}S=\frac{\pi^2}{8}$，得 $S=\frac{\pi^2}{6}$；从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}S=\frac{\pi^2}{24},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{3}{4}S-\frac{1}{4}S=\frac{\pi^2}{12}.$$

例 11.2.48　【2016 年全国竞赛预赛题】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$，用傅里叶级数理论证明 $f(x)$ 为常数.

分析　$f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，考虑证明 $a_n=b_n=0$.

证　由 $f(x)=f(x+2)$ 知 $f(x)$ 是周期函数，2 是其周期，$f(x)$ 在长度为 2 的区间上积分与区间无关，其傅里叶系数为

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x,\quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi(x-\sqrt{3})\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)(\cos n\pi x\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi x\sin\sqrt{3}n\pi)\mathrm{d}x$$

$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\,, \tag{1}$$

同理，

$$b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi\,, \tag{2}$$

联立式（1）、（2）可得 $a_n=b_n=0$.

由 $f(x)$ 处处可导，知其傅里叶级数展开式处处收敛于 $f(x)$ ，有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}\,,$$

其中 $a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 为常数.

例 11.2.49　【2001 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 1-x & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ ，而 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ ，$-\infty<x<+\infty$ ，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$ ，$n=0,1,2,\cdots$ 求 $S\left(-\dfrac{9}{2}\right)$.

解　由已知，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2 为周期的余弦级数的和函数，故

$$S\left(-\frac{9}{2}\right)=S\left(-\frac{9}{2}+4\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}^{+}\right)+f\left(\frac{1}{2}^{-}\right)}{2}=\frac{3}{8}.$$

11.2.10　题型十、无穷级数的应用问题

例 11.2.50　设某人在银行存款 A 元，假定银行存款的年利率为常数 a ，依复利计算，如果他要在第一年末提取 1 元，在第二年末提取 4 元，…，在第 n 年提取 n^2 元，并且他希望永远如此提取，问他至少需要事先存入多少本金？

解　设 A_n 是为了保证第 n 年年末提取 n^2 元所存入 n 年的本金，那么这部分本金第 n 年年末的本利和为 $A_n(1+a)^n$ ，于是有 $A_n(1+a)^n=n^2$ ，得

$$A_n=\frac{n^2}{(1+a)^n}\,,\quad n=1,2,\cdots,$$

从而，需要事先存入的本金至少为

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^n}=\frac{1}{1+a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^{n-1}}\,.$$

设 $S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，容易求得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$．由于

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\cdot\left(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)'\\&=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)'=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\\&=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

因此

$$S(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

从而

$$A=\frac{1}{1+a}S\left(\frac{1}{1+a}\right)=\frac{1}{1+a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^{n-1}}=\frac{(1+a)(2+a)}{a^3}.$$

11.3　深 化 训 练

11.3.1　【2004 年北京市竞赛题】已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ 收敛，求 α 的取值范围.

11.3.2　【2002 年北京市竞赛题】设数列满足 $F_0=1,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geqslant 2)$.

（1）证明 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\leqslant F_n\leqslant 2^{n-1}$；

（2）级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln F_n}$ 是否收敛？为什么？

11.3.3　【2012 年北京市竞赛题】设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

（1）求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；（2）试证明对任意的正数 λ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

11.3.4　【2013 年全国竞赛预赛题】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 2 阶可导，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

11.3.5　【2001 年北京市竞赛题】（1）构造一正项级数，使得可用根值审敛法判定其敛散性，而不能用比值审敛法判定其敛散性.

（2）构造两级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，使得 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=l$ 存在，且 $0<|l|<+\infty$，但两级数的敛散性不同.

11.3.6　【2011 年北京市竞赛题】设 $a>0$，判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 的敛散性.

11.3.7　设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 收敛.

11.3.8　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a}-1),(a>0)$ 的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛.

11.3.9　判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\ln n}{n^{\frac{2}{3}}+(-1)^{n-1}}$ 的敛散性.

11.3.10　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ 存在，证明 $r=-1$.

11.3.11　【2005 年北京市竞赛题】（1）举例说明存在通项趋于零但发散的交错级数；（2）举例说明存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，但 $a_n\neq o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，此处 $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 是当 $n\to\infty$ 时比 $\dfrac{1}{n}$ 高阶的无穷小.

***11.3.12**　【2012 年全国竞赛预赛题】设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数.

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

***11.3.13**　【2013 年全国竞赛决赛题】若对任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 都是收敛的，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

***11.3.14**　设存在 $M>0$，使得 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant nM,n=1,2,\cdots$，证明：对 $\forall r>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{1+r}}$ 收敛.

***11.3.15**　【2011 年全国竞赛决赛题】设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数，且满足：（1）$f(x)>0$；（2）$|f'(x)|\leqslant mf(x)$，其中 $0<m<1$，任取 a_0，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1}),n=1,2,\cdots$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛.

11.3.16　【1961 年美国大学生竞赛题】 设实数列 $\{a_n\}$ 满足：$0\leqslant a_k\leqslant 100a_n$，$n=1,2,\cdots$，且 $n\leqslant k\leqslant 2n$；级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

11.3.17　【2005 年北京市竞赛试题】设 $x>0$ 或 $x<-1$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{[1+(n-1)x](1+2nx)}{(1+nx)[1+2(n-1)x]}$ 的和.

11.3.18　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 的和.

11.3.19　【2004 年北京市竞赛题】设 $a_1=a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, n\geqslant 1$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$.

11.3.20　【2008 年北京市竞赛题】求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-(2n)!}{n(2n)!}$ 的和.

11.3.21　已知正数列 $\{a_n\}$ 收敛于正数 a，设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n x^n$ 的收敛半径.

11.3.22　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、恒为正，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right]x^n$ 的收敛半径.

11.3.23　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}\ (|x|<1)$ 的和函数.

11.3.24　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}$ 的收敛性，若收敛，求其和.

11.3.25　【2004 年北京市竞赛题】设

$$a_0=1, a_1=-2, a_2=\frac{7}{2},\ \ a_{n+1}=-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a_n\quad (n\geqslant 2)\ ,$$

证明当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，并求其和函数 $S(x)$.

11.3.26　设有级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right](-\infty<x<+\infty)$，求级数的和函数.

11.3.27　【2015 年全国竞赛预赛题】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

11.3.28　将幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!4^n}x^{2n+1}$ 展成 $x+1$ 的幂级数.

11.3.29　【1975 年前苏联大学生竞赛题】求 $\dfrac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$ 的值.

11.3.30　设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，a_n, b_n 为其傅里叶系数，求 $f(x+l)$ 的傅里叶系数.

11.3.31　设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为连续的偶函数，且 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，试证明在 $f(x)$ 的以 2π 为周期的余弦级数中，系数 $a_{2n}=0\,(n=0,1,2,\cdots)$.

11.3.32　设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 可积，a_n, b_n 为其傅里叶系数，证明：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

11.4 深化训练详解

11.3.1 当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{1}{6n^3},$$

因此有 $\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\sim\frac{1}{6^{\alpha}n^{3\alpha}}$，而当 $\alpha>\frac{1}{3}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{\alpha}n^{3\alpha}}$ 收敛，当 $\alpha\leqslant\frac{1}{3}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{\alpha}n^{3\alpha}}$ 发散，由比较判别法的极限形式可知，当且仅当 $\alpha>\frac{1}{3}$ 时，原级数收敛.

11.3.2 （1）显然 $F_n>0$，且 F_n 单调递增，故

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\leqslant 2F_{n-1}\leqslant 2^2F_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant 2^{n-1}F_1=2^{n-1},$$

又由 $F_{n-1}\leqslant 2F_{n-2}$，得 $F_{n-2}\geqslant\frac{1}{2}F_{n-1}$，因而

$$F_n\geqslant F_{n-1}+\frac{1}{2}F_{n-1}=\frac{3}{2}F_{n-1}\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^2F_{n-2}\geqslant\cdots\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}F_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

故有 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\leqslant F_n\leqslant 2^{n-1}$.

（2）由（1）可知，

$$\frac{1}{F_n}\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\quad \frac{1}{\ln F_n}\geqslant\frac{1}{(n-1)\ln 2},$$

由比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln F_n}$ 发散.

11.3.3 （1）由于

$$\frac{a_n+a_{n+2}}{n}=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

故

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

（2）由于

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

则 $0<\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$，而 $\lambda+1>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，由比较判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

11.3.4 由题意，$f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内一阶导数连续．由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，得

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0\text{，}\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0\text{，}$$

由麦克劳林公式，

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{，}\quad n\to\infty\text{，}$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较判别法的极限形式可知，原级数收敛.

注　由$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$，得

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}\text{，}\quad n\to\infty\text{，}$$

从而原级数收敛.

11.3.5　（1）令$u_n=\frac{2+(-1)^n}{3^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{3^n}}=\frac{1}{3}\text{，}$$

由根值审敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，但$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{3[2+(-1)^n]}$，极限不存在，故不能用比值审敛法.

（2）取

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\text{，}\quad v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\text{，}$$

有$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]=1$，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛.

11.3.6　记$b_n=\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n+1})}\frac{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0 & a<1\\ \frac{1}{2} & a=1\text{，}\\ 1 & a>1\end{cases}$$

由比值判别法知，当$a\leqslant 1$时级数收敛. 当$a>1$时，

$$b_n=\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n)}\text{，}$$

其中 $0<a_1=\dfrac{1}{a}<1$．记 $c_n=(1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n)$，显然 $\{c_n\}$ 单调增加. 由 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>1+x$，得

$$c_n=(1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n)<\mathrm{e}^{a_1}\mathrm{e}^{a_1^2}\cdots\mathrm{e}^{a_1^n}=\mathrm{e}^{\frac{a_1-a_1^{n+1}}{1-a_1}}<\mathrm{e}^{\frac{a_1}{1-a_1}},$$

故 $\{c_n\}$ 有界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且大于零，因此原级数发散.

综上所述，当 $0<a\leqslant1$ 时原级数收敛，当 $a>1$ 时，原级数发散.

11.3.7　记 $u_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$．又因为

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\&=\frac{1}{n+1}\left(a_{n+1}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right),\end{aligned}$$

而 $\{a_n\}$ 单调减少，可知 $a_{n+1}-\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant0$，所以 $u_{n+1}-u_n\leqslant0$，即数列 $\{u_n\}$ 单调减少，由莱布尼茨法则可知，原级数收敛.

11.3.8　令 $u_n=\sqrt[n]{a}-1$，即 $u_n=\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}}-1$，有 $u_n\sim\dfrac{\ln a}{n}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln a}{n}$ 条件收敛，所以原级数条件收敛.

11.3.9　令 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}\ln n}{n^{\frac{2}{3}}+(-1)^{n-1}}$，则

$$u_n=\frac{\left[n^{\frac{2}{3}}-(-1)^{n-1}\right]\cdot(-1)^{n-1}\ln n}{n^{\frac{4}{3}}-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-1}n^{\frac{2}{3}}\ln n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}-1}-\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}-1}.$$

设 $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$，则

$$f'(x)=\frac{(\ln x+1)(x^2-1)-2x^2\ln x}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2(\ln x-1)+\ln x+1}{(x^2-1)^2}<0\quad(x\geqslant3),$$

因此函数 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，故当 n 比较大时，数列单调 $\left\{\dfrac{n^{\frac{2}{3}}\ln n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}-1}\right\}$ 递减. 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{2}{3}}\ln n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}-1}=0$，从而由莱布尼茨法则可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3}{2}\dfrac{(-1)^{n-1}n^{\frac{2}{3}}\ln n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}-1}$ 收敛．又由比较判别法的极限形式可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}-1}$ 收敛，所以根据级数收敛的性质可知，原级数收敛.

11.3.10　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|r|$．若 $|r|<1$，则原级数绝对收敛，矛盾；若 $|r|>1$，则由于是比较法所得的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，故原级数也发散，矛盾；若 $|r|=1$，则当 $r=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，即当 n 充分大以后，a_{n+1} 与 a_n 同号，这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛矛盾，故只可能是 $r=-1$，得证.

11.3.11　（1）设级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}u_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right],$$

由莱布尼茨法则，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散，所以原级数发散.

（2）令 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & n=m^2,m\in\mathbf{N}\\ \dfrac{1}{n^2} & 否则\end{cases}$（$n=0,1,2,\cdots$），显然 $a_n\neq o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，$n\to\infty$.

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和 $S_n\leqslant 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$，故部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，从而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

11.3.12　（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=c>0$，则对满足 $r=c-\varepsilon>0$ 的正数 ε，必 $\exists N$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}>r$，即 $ra_{n+1}<\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$，从而

$$a_{n+1}<\frac{1}{r}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right).$$

则对 $\forall m\geqslant N$，有

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}<\frac{1}{r}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)<\frac{1}{r}\frac{a_N}{b_N},$$

可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，从而级数收敛.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，由保号性，$\exists N,$ 当 $n\geqslant N$ 时，有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}<0$，即 $\dfrac{a_n}{b_n}<\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$，有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{b_{n+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

11.3.13　反证法．若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\right)=+\infty .$$

故存在正整数 n_1，使得 $S_{n_1}>1$；存在正整数 $n_2>n_1$，使得 $S_{n_2}-S_{n_1}>2$；$\cdots$；存在正整数 $n_k>n_{k-1}$，使得 $S_{n_k}-S_{n_{k-1}}>k$，$\cdots$.

构造数列 $\{x_n\}$：

$$x_i=\frac{1}{k}\operatorname{sgn}(a_i)\quad\left(n_{k-1}<i\leqslant n_k,k=1,2,\cdots,n_0=0\right),$$

使得 $\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_ix_i=\frac{1}{k}\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}|a_i|>1$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 的部分和数列 $\{W_n\}$ 的子数列 $\{W_{n_k}\}$ 无上界，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 发散. 而数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$，但使得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 发散，与题设矛盾，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

11.3.14　记 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^{1+r}}$，则

$$S_n=\frac{a_1}{1^{1+r}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{A_k-A_{k-1}}{k^{1+r}}=\frac{A_1}{1^{1+r}}+\left(\frac{A_2}{2^{1+r}}-\frac{A_1}{2^{1+r}}\right)+\cdots+\left(\frac{A_n}{n^{1+r}}-\frac{A_{n-1}}{n^{1+r}}\right)$$

$$=\left(\frac{A_1}{1^{1+r}}-\frac{A_1}{2^{1+r}}\right)+\left(\frac{A_2}{2^{1+r}}-\frac{A_2}{3^{1+r}}\right)+\cdots+\left[\frac{A_{n-1}}{(n-1)^{1+r}}-\frac{A_{n-1}}{n^{1+r}}\right]+\frac{A_n}{n^{1+r}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}A_k\left[\frac{1}{k^{1+r}}-\frac{1}{(k+1)^{1+r}}\right]+\frac{A_n}{n^{1+r}},$$

且

$$\left|A_k\left[\frac{1}{k^{1+r}}-\frac{1}{(k+1)^{1+r}}\right]\right|=\left|\frac{A_k}{k}\right|\cdot\left|\frac{1}{k^r}-\frac{k+1-1}{(k+1)^{1+r}}\right|\leqslant M\left|\left(\frac{1}{k^r}-\frac{1}{(k+1)^r}\right)+\frac{1}{(k+1)^{1+r}}\right|.$$

令 $T_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^r}-\frac{1}{(k+1)^r}\right]$，则

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^r}-\frac{1}{(k+1)^r}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)^r}\right]=1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^r}-\frac{1}{(n+1)^r}\right]$ 收敛，由 $1+r>1$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{1+r}}$ 也收敛，从而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n^r}-\frac{1}{(n+1)^r}\right)+\frac{1}{(n+1)^{1+r}}\right]$ 收敛，由比较判别法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\frac{1}{n^{1+r}}-\frac{1}{(n+1)^{1+r}}\right]$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}A_k\left(\frac{1}{k^{1+r}}-\frac{1}{(k+1)^{1+r}}\right)$ 存在；又由 $\frac{|A_n|}{n}\leqslant M$，得 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^{1+r}}=0$，从而 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，即原级数收敛.

11.3.15　函数 $y=\ln f(x)$ 在以 a_{n-1} 与 a_n 为端点的区间上利用拉格朗日中值定理得

$$a_n-a_{n-1}=\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})=\frac{f'(\xi_{n-1})}{f(\xi_{n-1})}(a_{n-1}-a_{n-2}),$$

其中 ξ_{n-1} 位于 a_{n-1} 与 a_n 之间. 因此

$$|a_n-a_{n-1}|=\left|\frac{f'(\xi_{n-1})}{f(\xi_{n-1})}\right|\cdot|a_{n-1}-a_{n-2}|\leqslant m\cdot|a_{n-1}-a_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant m^{n-1}\cdot|a_1-a_0|.$$

故有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k-a_{k-1}|\leqslant(m^{n+p-1}+m^{n+p-2}+\cdots+m^n)|a_1-a_0|,$$

由于 $0<m<1$，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|a_k-a_{k-1}|<\varepsilon$，由柯西收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$ 收敛，从而原级数绝对收敛.

11.3.16　由 $0\leqslant a_k\leqslant 100a_n$，$n\leqslant k\leqslant 2n$，$\forall n\in\mathbf{N}^+$，可得

$$0\leqslant a_{2n}\leqslant 100a_l,\ l=n,n+1,\cdots,2n-1,$$

将这 n 个不等式相加，有

$$0\leqslant na_{2n}\leqslant 100(a_n+\cdots+a_{2n-1}).$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛，由柯西收敛准则得，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\cdots+a_{2n-1})=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}na_{2n}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}2na_{2n}=0$；又由于

$$0\leqslant(2n-1)a_{2n-1}\leqslant 2na_{2n-1}\leqslant 200(a_n+\cdots+a_{2n-1}),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)a_{2n-1}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

11.3.17　记 $u_n(x)=\ln\dfrac{[1+(n-1)x](1+2nx)}{(1+nx)[1+2(n-1)x]}$，则

$$u_n(x)=\ln\frac{1+(n-1)x}{1+2(n-1)x}-\ln\frac{1+nx}{1+2nx},$$

从而级数的前 n 项和

$$S_n(x)=\ln 1-\ln\frac{1+nx}{1+2nx}=-\ln\frac{1+nx}{1+2nx},$$

故级数的和为

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=-\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1+nx}{1+2nx}=\ln 2.$$

11.3.18　部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2\cdot 2^2}+\cdots+\arctan\frac{1}{2n^2}.$$

而

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2\cdot 2^2}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2^2}}=\arctan\frac{2}{3},$$

假设 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan\frac{n-1}{n}$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}=\sum_{k=1}^{n-1}\arctan\frac{1}{2k^2}+\arctan\frac{1}{2n^2}$$

$$=\arctan\frac{n-1}{n}+\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2n^2}}{1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2n^2}}=\arctan\frac{n}{n+1},$$

由数学归纳法可知 $S_n=\arctan\frac{n}{n+1}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}$.

11.3.19　设 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$，则

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{2^{n+2}}=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}+a_n}{2^{n+2}}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(S-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}S,$$

即 $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(S-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}S$，解得 $S=2$.

注　此问题也可考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数，代入 $x=\frac{1}{2}$ 即可得.

11.3.20　由题意

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-(2n)!}{n(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

11.3.21　由已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n/n}{S_{n+1}/(n+1)}\cdot\frac{n}{n+1}=1,$$

故原级数的收敛半径为 1.

11.3.22　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故存在最值．设 $f(x)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 处取得最大值 M，则对 $\forall x\in[a,b]$，有 $0<f(x)\leqslant M$，记 $a_n=\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t$，则由积分中值定理，

$$a_n=\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t=f^n(\xi)(b-a),$$

其中 $a<\xi<b$，则 $\sqrt[n]{a_n}\leqslant M\sqrt[n]{b-a}$；对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得对 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq[a,b]$，有 $f(x)\geqslant M-\varepsilon$，从而

$$a_n\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(t)\mathrm{d}t\geqslant 2\delta(M-\varepsilon)^n,$$

故 $\sqrt[n]{a_n}\geqslant(M-\varepsilon)\sqrt[n]{2\delta}$．综上可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=M$，从而幂级数的收敛半径为 $\dfrac{1}{M}$．

11.3.23　由于

$$u_n(x)=\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{x^{2^n}-1+1}{(x^{2^n}+1)(x^{2^n}-1)}=\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1},$$

因此级数的部分和为

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2^k}}{x^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{x^{2^k}-1}-\frac{1}{x^{2^{k+1}}-1}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1},$$

由 $|x|<1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$，故原级数的和函数为

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{1}{x-1}+1=\frac{x}{x-1}.$$

11.3.24　由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+2)}{(n+1)!(n+3)}=0<1,$$

由比值法知，级数收敛. 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+2)}x^{n+2}$．设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+2)}x^{n+2}$，由于

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}=x(\mathrm{e}^x-1),$$

故

$$S(x)=\int_0^x t(\mathrm{e}^t-1)\mathrm{d}t=(x-1)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2},$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+2)}=S(1)=\dfrac{1}{2}$．

11.3.25　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=1$，得级数的收敛半径 $R=1$，故当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛．由 $a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n\quad(n\geqslant 2)$ 可知，当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$a_n=-\frac{n+1}{n}a_{n-1}=-\frac{n+1}{n}\left(-\frac{n}{n-1}\right)a_{n-2}=\cdots=(-1)^{n-2}\frac{n+1}{3}a_2=(-1)^{n-2}\frac{7}{6}(n+1).$$

因此和函数

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^n=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)x^n .$$

令 $g(x)=\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$，由于

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=3}^{\infty}\int_0^x(-1)^n(n+1)t^n\mathrm{d}t=-\sum_{n=3}^{\infty}(-x)^{n+1}=\frac{-x^4}{1+x},$$

两边求导，得

$$g(x)=-\left(\frac{x^4}{1+x}\right)'=-\frac{4x^3+3x^4}{(1+x)^2},$$

故

$$S(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right),\quad x\in(-1,1).$$

11.3.26　令 $S(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right](-\infty<x<+\infty)$，则 $S(0)=1$. 因为

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],\quad S'(0)=\frac{1}{3}.$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]+1,$$

得 $S''(x)-S(x)=0$，通解为 $S(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$. 由 $S(0)=1$，$S'(0)=\dfrac{1}{3}$，得特解为

$$S(x)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}.$$

11.3.27　$a_n=\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+2}{(n+2)(n^3+2)}=0$，收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$，而

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{n^3+1+1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)(n^2-n)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!},$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-2)!}(x-1)^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(x-1)^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域均为 $(-\infty,+\infty)$，故

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^n$$

$$=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\frac{1}{x-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n-1\right)$$

$$=(x-1)^2\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{x-1}+\frac{1}{x-1}(\mathrm{e}^{x-1}-1)\qquad(x\neq 1),$$

当 $x=1$ 时， $S(x)=2$. 从而

$$S(x)=\begin{cases}(x-1)^2\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}(\mathrm{e}^{x-1}-1) & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}.$$

11.3.28 由题意

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!4^n}x^{2n+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=2\sin\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x+1}{2}-\frac{1}{2}\right),$$

$$=2\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{1}{2}-2\cos\frac{x+1}{2}\sin\frac{1}{2}$$

$$=2\cos\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}-2\sin\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2^{2n-1}}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}}{2(2n+1)}(x+1)^{2n+1}-\sin\frac{1}{2}(x+1)^{2n}\right],\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

11.3.29 记

$$p=1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots,\quad q=\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots,$$

则

$$\pi p-\pi^3q=\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\frac{\pi^9}{9!}-\cdots,$$

即 $\pi p-\pi^3q=\sin\pi=0$ ，故原式 $=\dfrac{p}{q}=\pi^2$.

11.3.30 $f(x+l)$ 的傅里叶系数为

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+l)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{l-\pi}^{l+\pi}f(t)\cos n(t-l)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{l-\pi}^{l+\pi}f(t)\left[\cos nt\cos nl+\sin nt\sin nl\right]\mathrm{d}t=a_n\cos nl+b_n\sin nl,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+l)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{l-\pi}^{l+\pi}f(t)\sin n(t-l)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{l-\pi}^{l+\pi}f(t)\left[\sin nt\cos nl-\cos nt\sin nl\right]\mathrm{d}t=b_n\cos nl-a_n\sin nl.$$

11.3.31　由题意

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x .$$

在第一个积分中，令 $x=\frac{\pi}{2}-t$ ，在第二个积分中，令 $x=\frac{\pi}{2}+t$ ，则

$$\begin{aligned}a_{2n}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\mathrm{d}t+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos(n\pi+2nt)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\mathrm{d}t+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\mathrm{d}t\\&=0\qquad(n=0,1,2,\cdots).\end{aligned}$$

11.3.32　设 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ， S_n 为其前 $n+1$ 项部分和，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-S_n\right]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2\mathrm{d}x\geqslant 0 .$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\mathrm{d}x\\&=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right],\end{aligned}$$

由三角函数系的正交性，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]^2\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right],$$

所以对任意正整数 n ，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

从而

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) .$$

*第 12 章　空间解析几何与向量代数

12.1　知 识 要 点

本章内容主要包括：向量的基本概念及线性运算，数量积、向量积、混合积，空间曲线的概念及其方程、平面及其方程，空间直线及其方程，曲面的基本概念及常见曲面的方程.

12.1.1　向量的概念及线性运算

1．向量及其表示

（1）向量：既有大小又有方向的量，几何上即为有向线段，数学上研究与起点无关的自由向量.

（2）向量的表示：以点 P 为起点，点 Q 为终点的有向线段是一个向量，记为 $\overrightarrow{PQ}$，或者用粗体字母表示，如记为 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$.

（3）向量的坐标与模长：设点 P 的坐标为 (a_1,b_1,c_1)，点 Q 的坐标为 (a_2,b_2,c_2)，则向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标为 $(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1)$，该向量的模长为

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}\ .$$

（4）方向余弦：向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|a|},\cos\beta=\dfrac{a_y}{|a|},\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|a|}$.

2．向量的运算

（1）加法与减法（平行四边形法则，如图 12.1 所示）：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\ ,\quad \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\ .$$

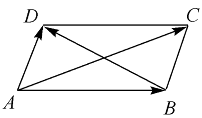

图 12.1

（2）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；其射影表示式为：当 $a\neq 0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}\,j_a\boldsymbol{b}$；当 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}\,j_b\boldsymbol{a}$.

（3）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积的坐标计算式：设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；$\boldsymbol{a}$ 与 b 垂直的充要条件是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

（4）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\,\boldsymbol{e}_c$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$\boldsymbol{e}_c$ 为同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量，向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{e}_c$ 成右手系；$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积.

（5）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的坐标计算式：设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right);$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

（6）向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$．若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 .$$

12.1.2　平面方程及其相关概念

在空间直角坐标系里，平面上的任意一点满足一个三元一次方程，反之，满足一个三元一次方程的点的集合是一个平面，故平面与三元一次方程呈一一对应的关系.

（1）平面的点法式方程：过点 (x_0,y_0,z_0)，以非零向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

（2）平面的一般式方程：在点法式方程中，令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，得到形如 $Ax+By+Cz+D=0$ 的方程.

（3）平面的截距式方程：平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 a,b,c，当 $abc\neq 0$ 时，平面的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

（4）平面的三点式方程：设 $P_i(x_i,y_i,z_i)\ (i=1,2,3)$ 为平面上不共线的三点，则有平面方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 .$$

（5）点到平面的距离公式：点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} .$$

12.1.3　直线及其表示

（1）直线的一般式方程：两张平面交于一条直线，得直线方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} .$$

（2）直线的点向式方程：过点 $P(x_0,y_0,z_0)$，方向为 $\boldsymbol{\tau}=(m,n,p)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} .$$

（3）直线的参数式方程：点向式方程中，令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，得

$$x=x_0+mt, y=y_0+nt, z=z_0+pt ,$$

其中 t 为参数.

（4）点到直线的距离：直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}$ ，P 为 L 上一点，则点 Q 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|} .$$

（5）两条异面直线间的距离：M_1 为直线 L_1 上一点，M_2 为直线 L_2 上一点，L_1 与 L_2 的方向分别为 $\boldsymbol{\tau}_1$ 与 $\boldsymbol{\tau}_2$ ，则直线 L_1 和 L_2 的公垂线长

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)|}{|\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2|} .$$

12.1.4　曲面及其表示

曲面的一般方程为 $F(x,y,z)=0$ 或能写成 $z=f(x,y)$ ；参数形式为

$$x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v) .$$

（1）球面：一般方程为 $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ ，常化为标准方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 ,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为球心， R 为半径.

（2）柱面：方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$ 的柱面；方程 $F(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴，准线为 $\begin{cases}F(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$ 的柱面；方程 $F(z,x)=0$ 表示母线平行于 y 轴，准线为 $\begin{cases}F(z,x)=0\\ y=0\end{cases}$ 的柱面.

（3）旋转曲面： $\begin{cases}F(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面为 $F(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$ ，绕 z 轴旋转一周所得曲面为 $F(\pm\sqrt{y^2+z^2},z)=0$ ；类似可得其他坐标平面上的曲线绕同一坐标平面内的坐标轴旋转一周所得曲面的方程.

（4）常见二次曲面的标准方程如下。

椭球面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ；　　二次锥面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ ；

单叶双曲面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ；　　双叶双曲面： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ；

椭圆抛物面： $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ ；　　双曲抛物面： $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$.

12.1.5　空间曲线

两张曲面的交线为曲线，其一般方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ ，参数式方程为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) ,$$

这里为 t 参数.

12.2　典型例题分析

12.2.1　题型一、向量的运算问题

例 12.2.1　设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共线，试证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

证　必要性　由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

从而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$；又

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，故 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，从而有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

充分性　由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，得 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. 从而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b},$$

而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，故 $\lambda\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，有

$$(1+\lambda)(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}.$$

若 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$；

若 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=-1$，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

例 12.2.2　设有非零向量 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，$|\boldsymbol{a}|=a$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

解　由题意

$$\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=\lim_{x\to0}\frac{(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|}=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{a}|}=-|\boldsymbol{a}|=-a.$$

例 12.2.3　【2006 年北京市竞赛题】设单位向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为 $\theta(0<\theta<\pi)$，a,b 为正常数，则 $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1}{\theta^2}[|a\boldsymbol{\alpha}|+|b\boldsymbol{\beta}|-|a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}|]=$________.

解　由于

$$|a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta})\cdot(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta})}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta},$$

因此

$$\text{原式}=\lim_{\theta\to0}\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{ab\sin\theta}{2\theta\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}$$

$$=\frac{ab}{2(a+b)}.$$

12.2.2　题型二、空间直线、平面方程的求解

例 12.2.4　已知直线 L 过点 $A(-1,2,-3)$ 且平行于平面 $\Pi:6x-2y-3z+2=0$，又与直线 $L_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$ 相交，求直线 L 的方程.

解　设平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线 L 与 L_1 的交点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则

$$\boldsymbol{n}=(6,-2,-3)，\quad \overrightarrow{AM_0}=(x_0+1,y_0-2,z_0+3).$$

易知直线 L_1 的参数形式方程为

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+2t \\ z=3-5t \end{cases}.$$

由于向量 $\overrightarrow{AM_0}$ 平行于 Π，则 $\overrightarrow{AM_0}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即

$$6(x_0+1)-2(y_0-2)-3(z_0+3)=0,$$

由于 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在 L_1 上，因此

$$\begin{cases} x_0=1+3t \\ y_0=-1+2t \\ z_0=3-5t \end{cases},$$

将 x_0,y_0,z_0 代入上式得

$$6(2+3t)-2(-3+2t)-3(6-5t)=0,$$

得 $t=0$，交点 $M_0(1,-1,3)$．故通过点 A 和点 M_0 的直线方程为 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$．

例 12.2.5　求过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $\Pi: x-4y-8z+12=0$ 组成的 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

解　过已知直线 L 的平面束方程为 $x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$，即

$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0,$$

其法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$，平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,-4,-8)$，由题设知

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}},$$

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$，解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$，代回平面束方程为

$$x+20y+7z-12=0.$$

验证 $x-z+4=0$ 与 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角也为 $\dfrac{\pi}{4}$．所以满足题意的平面为 $x-z+4=0$ 和 $x+20y+7z-12=0$．

例 12.2.6　【2016 年全国竞赛预赛题】 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

解　设切点为 (x_0,y_0,z_0)，曲面在该点的法向量为 $(x_0,2y_0,-1)$，切平面方程为

$$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0，\text{即 } x_0x+2y_0y-z-z_0=0.$$

由平面平行，有 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{-1}{-1}$，得 $x_0=2, y_0=1$．代入方程 $z_0=\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2$，得 $z_0=3$．平面 $2x+2y-z=3$ 为所求.

例 12.2.7　【2008 年北京市竞赛题】已知入射光线的路径为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=z-2$，则此光线经过平面 $x+2y+5z+17=0$ 反射后的反射线所在直线的方程为________．

解　直线与平面的交点为 $(-7,-5,0)$，设所求直线方程 L_1 为 $\dfrac{x+7}{a}=\dfrac{y+5}{b}=\dfrac{z}{c}$．平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,5)$．由于三线共面，所以 $\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 5\\ a & b & c\end{vmatrix}=0$，得 $13a-19b+5c=0$．又由入射角与反射角相等，所以

$$\frac{4\times 1+3\times 2+1\times 5}{\sqrt{16+9+1}}=\frac{a\times 1+b\times 2+c\times 5}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

此题关键是求 $a:b:c$，因此不妨设

$$a\times 1+b\times 2+c\times 5=15,\quad \sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{26}.$$

解得 $a=-3, b=-1, c=4$，或者 $a=4, b=3, c=1$（舍去）．故反射线所在直线的方程为

$$\frac{x+7}{3}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{-4}.$$

12.2.3　题型三、讨论直线与平面的位置关系

例 12.2.8　设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\varPi:2x+5y+2z+a=0$（a 为常数），试判定直线 L 与平面 $\varPi$ 的关系.

解　直线 L 的方向为

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -10\end{vmatrix}=(-28,14,-7)\,/\!/\,(4,-2,1),$$

而 $(4,-2,1)\cdot(2,5,2)=0$，故直线 L 的方向 $\boldsymbol{\tau}$ 与平面的法向量垂直. 设过直线 L 的平面束方程为

$$x+3y+2z+1+\lambda(2x-y-10z+3)=0,$$

即

$$(1+2\lambda)x+(3-\lambda)y+(2-10\lambda)z+1+3\lambda=0.$$

若 $\dfrac{1+2\lambda}{2}=\dfrac{3-\lambda}{5}$，得 $\lambda=\dfrac{1}{12}$，此时

$$\frac{1+2\lambda}{2}=\frac{3-\lambda}{5}=\frac{2-10\lambda}{2}=\frac{7}{12},$$

若$\dfrac{1+3\lambda}{a}=\dfrac{7}{12}$，即$a=\dfrac{15}{7}$时，直线在平面$\Pi$内；若$a\neq\dfrac{15}{7}$，则直线平行于平面$\Pi$.

12.2.4　题型四、旋转曲面方程的求解

例 12.2.9　【1998 年考研题】求直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\Pi:x-y+2z-1=0$上的投影直线$l_0$的方程，并求$l_0$绕$Oy$轴旋转一周所成曲面的方程.

解　直线l可写为$\begin{cases}x-y-1=0\\y+z-1=0\end{cases}$，过$l$的平面束方程为$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$，即

$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

为求投影直线，可令此平面与平面Π垂直，有$1-(\lambda-1)+2\lambda=0$，解得$\lambda=-2$，故过直线l且与平面Π垂直的平面方程为$x-3y-2z+1=0$，从而l_0的方程为

$$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}.$$

l_0的方程可化为$\begin{cases}x=2y\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1)\end{cases}$，则$l_0$绕$Oy$轴旋转一周所成曲面方程为

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2,$$

即$x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

例 12.2.10　求直线$l:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$绕$z$轴旋转一周所得旋转曲面的方程.

解　设点$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，则它一定是直线l上某一点旋转而来，设此点为$M_1(x_1,y_1,z_1)$，则$x_1=z_1,y_1=1$；由l绕z轴旋转得　$z=z_1$，且点M与点M_1到z轴的距离相等，即$x^2+y^2=1+x_1^2$，从而$x^2+y^2-z^2=1$.

例 12.2.11　【1999 年北京市竞赛题】表面为旋转曲面的镜子应具有怎样的形状才能使它将所有平行于其轴的光线反射到一点？求出旋转曲面的方程.

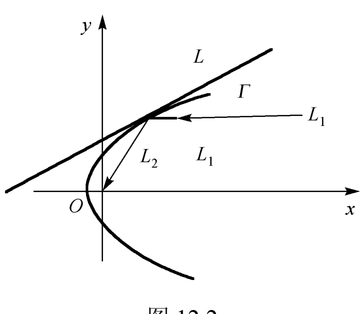

图 12.2

解　如图 12.2 所示，设旋转曲面的旋转轴为x轴，旋转曲面被xOy面所截的截线为Γ.

设Γ的方程为$y=y(x)$，入射光线L_1平行于x轴，反射光线L_2都经过原点$O(0,0)$，Γ在点$P(x,y(x))$的切线为L，则L的方向向量为$\boldsymbol{\tau}=(1,y'(x))$，$L_1$的方向向量为$\boldsymbol{\tau}_1=(-1,0)$，$L_2$的方向向量为$\boldsymbol{\tau}_2=(x,y(x))$，$L_1$与$L$的夹角为

$$\theta_1=\arccos\frac{|\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}_1|}{|\boldsymbol{\tau}|\cdot|\boldsymbol{\tau}_1|}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

L_2与L的夹角为

$$\theta_2=\arccos\frac{|\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}_2|}{|\boldsymbol{\tau}|\cdot|\boldsymbol{\tau}_2|}=\frac{x+yy'}{\sqrt{1+(y')^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由 $\theta_1=\theta_2$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{x+yy'}{\sqrt{1+(y')^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}},$$

得方程 $yy'=-x+\sqrt{x^2+y^2}\ (x\geqslant 0)$．令 $y=xu$，方程化为

$$\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}-(1+u^2)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

再令 $v^2=1+u^2\ (v>0)$，方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{1-v}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

解得 $(v-1)x=C$，即 $y^2=2Cx+C^2$．故旋转曲面方程为 $y^2+z^2=2Cx+C^2$，该旋转曲面为旋转抛物面.

12.2.5　题型五、空间曲线、曲面问题

例 12.2.12　【1994 年江苏省竞赛题】求曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ Ax+By+Cz=0\end{cases}$（$C\neq 0$）所围平面区域 D 的面积.

解　平面 $Ax+By+Cz=0$ 上第三方向余弦为

$$\cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

平面区域在 xOy 面上的投影为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，其面积为 πab，故区域 D 的面积为

$$\delta_D=\pi ab\frac{1}{|\cos\gamma|}=\frac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}.$$

例 12.2.13　【2002 年江苏省竞赛题】设曲线 $\varGamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2+4x-4y+2z=0\\ 2x+y-2z=k\end{cases}$.

（1）当 k 为何值时 $\varGamma$ 为一个圆？

（2）当 $k=6$ 时，求 $\varGamma$ 的圆心和半径.

解　（1）$x^2+y^2+z^2+4x-4y+2z=0$ 可化为

$$(x+2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9.$$

即为以点 $(-2,2,-1)$ 为球心，半径为 3 的球面，球心到平面 $2x+y-2z=k$ 的距离为

$$d=\frac{|-4+2+2-k|}{\sqrt{2^2+1+(-2)^2}}=\frac{|k|}{3},$$

球与平面相交于一条曲线，故有 $\dfrac{|k|}{3}<3$，得 $|k|<9$.

（2）当 $k=6$ 时，球心到平面 $\varPi:2x+y-2z=6$ 的距离为 2，此时所求圆的半径为 $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，过球心且与平面 $\varPi$ 垂直的直线方程为

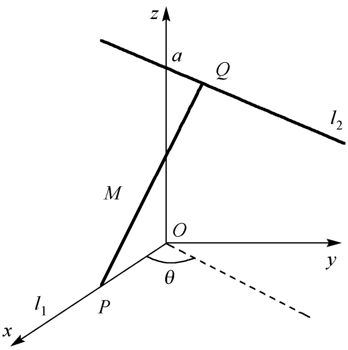

图 12.3

$$x=-2+2t, y=2+t, z=-1-2t,$$

代入平面 Π 的方程，得 $t=\dfrac{2}{3}$，故所求圆心为 $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{8}{3},-\dfrac{7}{3}\right)$.

例 12.2.14　已知两异面直线 l_1 与 l_2，试求联结 l_1 上的任一点与 l_2 上的任一点的连线段的中点轨迹.

解　如图 12.3 所示，建立坐标系，设两异面直线的公垂线长为 a，交角为 θ，公垂线取为 z 轴，l_1 取为 x 轴，则直线 l_1 与 l_2 的方程为

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0},\quad l_2:\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=\frac{z-a}{0},$$

化为参数形式

$$l_1: x=s, y=0, z=0,$$

$$l_2: x=t\cos\theta, y=t\sin\theta, z=a.$$

则 l_1 上的任意一点 P 的坐标为 $(s,0,0)$，l_2 上的任意一点 Q 的坐标为 $(t\cos\theta,t\sin\theta,a)$，其连线中点的坐标为 $\left(\dfrac{s+t\cos\theta}{2},\dfrac{t\sin\theta}{2},\dfrac{a}{2}\right)$，由于 a 为常数，故 PQ 中点的轨迹是一张平面，即 $z=\dfrac{a}{2}$.

12.3　深 化 训 练

12.3.1　填空题

（1）曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周而成的曲面方程为________.

（2）设 $M(x,y,z)$ 为平面 $x+y+z=1$ 上的点，且该点到两定点 $(1,0,1)$，$(2,0,1)$ 的距离平方之和为最小，则此点的坐标为________.

（3）曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 在 $(2,4,5)$ 处切线关于 x 轴的倾角为________.

（4）【2007 年北京市竞赛题】直线 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转的旋转曲面方程为________.

12.3.2　求过直线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{3}$，且平行于直线 $l_2: x=y=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程.

12.3.3　求过两平行线 $l_1:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$，$l_2:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$ 的平面方程.

12.3.4　求经过点 $P(1,-2,0)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 和 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 都平行的平面的方程.

12.3.5　【2010 年全国竞赛预赛题】求直线 $l_1:\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离.

12.3.6　【2012 年全国竞赛预赛题】求过直线 $l:\begin{cases} 2x+y-3z+2=0 \\ 5x+5y-4z+3=0 \end{cases}$ 的两个垂直平面，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

12.3.7　【2015 年全国竞赛预赛题】 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程.

12.4　深化训练详解

12.3.1　填空题

（1）$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$；　　（2）$\left(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；　　（3）$\dfrac{\pi}{4}$；

（4）$x^2+y^2-z^2=1$；**提示**　在旋转曲面上任取一点 $P(x,y,z)$，过 P 作垂直于 z 轴的平面，与直线相交于 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，即 P 点是 P_1 点绕 z 轴旋转形成的．由题意可得

$$x_1^2+y_1^2=x^2+y^2,\quad z=z_1. \tag{*}$$

令 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}=t$，可得直线的参数方程为

$$x=1,\ y=1+t,\ z=1+t.$$

由于 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在直线上，所以 $x_1=1,\ y_1=z_1$，代入（*）式可得 $1+z^2=x^2+y^2$，所以旋转曲面方程为 $x^2+y^2-z^2=1$.

12.3.2　所求平面方程的法向量为 $(1,2,3)\times(1,1,2)=(2,1,-1)$，点 $(1,-2,-3)$ 在平面上，故平面的点法式方程为

$$2(x-1)+(y+2)-(z+3)=0,$$

即 $2x+y-z-3=0$ 为所求.

12.3.3　由已知点 $A(-3,-2,0)$ 与 $B(-3,-4,-1)$ 在所求平面上，向量 $\overrightarrow{AB}=(0,-2,-1)$，故所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(0,-2,-1)\times(3,-2,1)=(-4,-3,6),$$

平面的点法式方程为 $(-4,-3,6)\cdot(x+3,y+2,z)=0$，即 $4x+3y-6z+18=0$.

12.3.4　两条直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,0)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,0)$，平面与直线平行，则平面的法向量 $\boldsymbol{a}=(A,B,C)$ 与直线垂直，从而由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}_1$，有 $A+B+0=0$；由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}_2$，有 $A-B-0=0$，解得 $A=0,B=0$，故只有 $C\neq 0$．又因为平面经过点 $P(1,-2,0)$，代入平面一般方程得

$$0\times1+0\times(-2)+C\times0+D=0,$$

解得 $D=0$，因此所求平面方程 $Cz=0$，即 $z=0$，也就是 xoy 平面.

12.3.5　l_1 的方向为

$$\boldsymbol{\tau}_1=(1,-1,0)\times(0,0,1)=(-1,-1,0).$$

l_2 的方向为 $\boldsymbol{\tau}_2=(4,-2,-1)$，故 l_1 与 l_2 的公垂线方向为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2=(-1,-1,0)\times(4,-2,-1)=(1,-1,6).$$

在 l_1 上取点 $P_1(1,1,0)$，在 l_2 上取点 $P_2(2,1,3)$，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{P_1P_2}$，则 l_1 与 l_2 的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{(1,0,3)\cdot(1,-1,6)}{\sqrt{38}}=\frac{\sqrt{38}}{2}.$$

12.3.6　过直线 l 的平面束方程为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0,$$

即

$$(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+2\lambda+3\mu=0.$$

当平面过点 $(4,-3,1)$，有

$$4(2\lambda+5\mu)-3(\lambda+5\mu)-(3\lambda+4\mu)+2\lambda+3\mu=0,$$

解得 $\mu=-\lambda$．此时两垂直平面中过点 $(4,-3,1)$ 的方程为 $3\lambda x+4\lambda y-\lambda z+\lambda=0$，即 $3x+4y-z+1=0$；另一平面与之垂直可得

$$3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+(3\lambda+4\mu)=0,$$

解得 $\lambda=-3\mu$．故其方程满足 $-\mu x+2\mu y+5\mu z-3\mu=0$，即平面 $x-2y-5z+3=0$ 为所求.

注　本题也可引入一个参数 λ，设平面束方程为

$$2x+y-3z+2+\lambda(5x+5y-4z+3)=0.$$

但由于这样的形式不能包含平面 $5x+5y-4z+3=0$，故引入两个参数适用性更强.

12.3.7　M 的顶点是 $(0,0,0)$，由于 M 以三个正半轴为母线，故可取平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线 L 为 M 的准线. 设 $P(x,y,z)\in M$，OP 与 L 交于点 (r,s,t)，则 $\dfrac{x}{r}=\dfrac{y}{s}=\dfrac{z}{t}=u$，代入准线方程，得 $\begin{cases}((x+y+z)\dfrac{1}{u}=1\\(x^2+y^2+z^2)\dfrac{1}{u^2}=1\end{cases}$，消去 u，得 M 的方程为 $xy+yz+zx=0$.

*第 13 章　曲线积分与曲面积分

13.1　知 识 要 点

13.1.1　第一类曲线积分的概念及计算

1．曲线的弧长

设曲线的参数方程为

$$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t),\quad t\in[\alpha,\beta],$$

且 $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续，且 $\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)$ 不同时为零，则曲线的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

2．第一类曲线积分的定义

设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧，函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上任意插入若干个分点把 L 分成 n 个小段：

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \cdots\Delta s_n,$$

并用 Δs_i 表示第 i 个小段的长度，$i=1,2,\cdots,n$．令 $\lambda=\max\{\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \cdots,\Delta s_n\}$．任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$，$i=1,\ 2,\cdots,n$，作和式 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$．如果不论对曲线弧 L 怎样划分，也不论在小段 Δs_i 上点 (ξ_i,η_i) 怎样选取，只要当 $\lambda\to0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在 L 上**对弧长的曲线积分**或**第一类曲线积分**，记为 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$．即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

曲线积分的定义也可推广到三维空间的曲线：

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

3．第一类曲线积分的计算方法

设 L_{AB} 为空间中的连续曲线，参数方程为 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$，其中 $t\in[\alpha,\beta]$，$\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续，函数 $f(x,y,z)$ 在弧 L_{AB} 上连续，则

$$\int_{L_{AB}}f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

注　相应于定积分与重积分，第一类曲线积分也有奇偶函数在对称曲线上的化简公式．如曲线 L_{AB} 上的点关于 $x=0$ 对称，$f(x)$ 在 L_{AB} 上可积，L_1 为曲线 L_{AB} 上 $x\geqslant0$ 部分的曲线，则有

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{L_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s & f(-x,y,z)=f(x,y,z)\\ 0 & f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\end{cases}.$$

类似地，可得曲线关于 $y=0$ 及 $z=0$ 对称的相应结果.

13.1.2 第二类曲线积分的概念及计算

1．第二类曲线积分的定义

设 L 为 xOy 面内的一条有向光滑曲线弧，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上沿 L 的方向任意插入若干点列

$$M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}),$$

把 L 分成 n 个小弧段：$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n;M_0=A,M_n=B)$，设 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，在弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取点 (ξ_i,η_i)，$i=1,2,\cdots,n$．如果不论对曲线弧 L 怎样划分，也不论点 (ξ_i,η_i) 怎样选取，只要当弧段长度的最大值 $\lambda\to0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 的极限总存在，则称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向弧 L 上**对坐标 x 的曲线积分或第二类曲线积分**，记为 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$．即

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\ .$$

类似地，函数 $Q(x,y)$ 在有向弧 L 上对坐标 y 的曲线积分 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，即

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\ .$$

应用时常将函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上从 A 点到 B 点沿弧 L 的第二类曲线积分记为 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，即有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

第二类曲线积分的定义可推广到三维空间的曲线：

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

2．第二类曲线积分的计算方法

设 L_{AB} 为空间的连续曲线，参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\,,\quad t\in[\alpha,\beta]\,,$$

当 t 由 α 变到 β 时，曲线上对应的点由 A 变到 B，$\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续，函数 $f(x,y,z)$ 在弧 L_{AB} 上连续，则

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left[P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\omega'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

3．两类曲线积分之间的联系

设 $\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z),\gamma(x,y,z)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y,z) 处的切向量的方向角，两类曲线积分之间有联系如下：

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s\,.$$

13.1.3　格林公式及其应用

1．格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

2．平面上曲线积分与路径无关的条件

设开区域 G 是一个单连通区域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则下列四条件等价：

（1）$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关；

（2）对于 G 内任意闭曲线 C，有 $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$；

（3）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 G 内恒成立；

（4）存在 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，此时

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\mathrm{d}t+c\,,$$

或

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)\mathrm{d}t+c\,,$$

其中 (x_0,y_0) 为 G 内一个定点，c 为任意常数.

13.1.4　第一类曲面积分的概念与计算

1．第一类曲面积分的概念

设函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上有界．把 Σ 任意分成 n 个小块 $\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n$，并用 Δs_i 表

示第 i 个小块的面积，$i=1,2,\cdots,n$．任取 $(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\in\Delta s_i$，$i=1,2,\cdots,n$，作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\Delta s_i$．如果不论对曲面 Σ 怎样划分，也不论在小块 Δs_i 上点 (ξ_i,η_i,γ_i) 怎样选取，只要当各个小块曲面的直径（曲面的直径是指曲面上任意两点间距离的最大者）的最大值 $\lambda\to 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\Delta s_i$ 的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\Delta s_i .$$

2．第一类曲面积分的计算方法

设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，$z(x,y)$ 在 D_{xy} 上有连续的导数，$f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

若曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$，也可以有相应于上式的计算公式.

注　类似于重积分的计算，第一类曲面积分也有奇偶函数在对称曲面上的化简公式．如曲面 Σ 上的点关于平面 $x=0$ 对称，$f(x)$ 在 Σ 上可积，Σ_1 为 Σ 的 $x\geqslant 0$ 部分的曲面，则有

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f(-x,y,z)=f(x,y,z)\\ 0, & f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\end{cases}.$$

类似地，可得曲面关于平面 $y=0$ 及 $z=0$ 对称的相应结果.

13.1.5　第二类曲面积分的概念与计算

1．第二类曲面积分的定义

设 Σ 为有向光滑曲面，函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界，则函数 $R(x,y,z)$ 在有向光滑曲面 Σ 上对坐标 x,y 的曲面积分定义为

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} .$$

其中 λ 是各小块曲面 ΔS_i 的直径的最大值，$(\Delta S_i)_{xy}$ 为 ΔS_i 在 xOy 面上的投影.

类似有函数 $P(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对坐标 y,z 的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} ,$$

以及函数 $Q(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对坐标 z,x 的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，即

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} .$$

在实际应用时，常将函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上沿 Σ 指定侧的第二类曲面积分记为 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

2．第二类曲面积分的计算方法

曲面 Σ 是由方程 $z = z(x,y)$ 给出的有向曲面，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，被积函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 连续，则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

其中正号表示曲面取上侧，负号表示取下侧. 类似有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} R(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z ,$$

其中正号表示曲面取前侧，负号表示取后侧.

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} R(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x ,$$

其中正号表示曲面取右侧，负号表示取左侧.

注　第二类曲面积分在计算时常采用如下同一投影法：

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \pm\iint_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))(-z'_x) + Q(x,y,z(x,y))(-z'_y) + R(x,y,z(x,y))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \pm\iint_{D_{yz}}\left[P(x(y,z),y,z) + Q(x(y,z),y,z)(-x'_y) + R(x(y,z),y,z)(-x'_z)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \pm\iint_{D_{zx}}\left[P(x,y(z,x),z)(-y'_x) + Q(x,y(z,x),z) + R(x,y(z,x),z)(-y'_z)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x .\end{aligned}$$

3．两类曲面积分之间的联系

设 $\alpha(x,y,z), \beta(x,y,z), \gamma(x,y,z)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向角，则两类曲面积分之间有联系如下：

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S .$$

13.1.6　高斯公式与斯托克斯公式

1．高斯公式

设空间闭区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ围成，三元函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

或

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\,,$$

其中Σ是Ω的边界曲面的外侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ上点(x,y,z)处的法向量的方向余弦.

2．曲面积分与曲面无关的条件

设Ω是空间单连通区域，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在Ω上可微，曲面$\Sigma\subset\Omega$，则下列三条件等价：

（1）$\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$在$\Omega$内与曲面无关，$\Sigma_1$是$\Omega$内与$\Sigma$具有相同边界曲线的任意曲面，其侧满足右手准则；

（2）对于Ω内任意闭曲面Σ_2,有$\oiint_{\Sigma_2}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

（3）$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$在$\Omega$内恒成立.

3．斯托克斯公式

设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，Γ的正向与Σ的侧符合右手法则，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在包含曲面Σ在内的一个空间区域具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\,.$$

4．空间曲线积分与路径无关的条件

设G是空间的面单连通区域，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在G上可微，则下列四条件等价：

（1）对于G内任意曲线Γ，$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$与路径无关；

（2）对于G内任意封闭曲线Γ，有$\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$；

（3）$\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z},\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$\Omega$内恒成立；

（4）存在$u(x,y,z)$，使$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，且

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0,z_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x,t,z_0)\mathrm{d}t+\int_{z_0}^{z}R(x,y,t)\mathrm{d}t+c,$$

或

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(t,y,z)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t,z)\mathrm{d}t+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,t)\mathrm{d}t+c,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为 G 内一个定点，$(x,y,z)\in G$，c 为任意常数.

注　积分时的路径可以选取从点 (x_0,y_0,z_0) 出发，沿以点 (x_0,y_0,z_0) 和点 (x,y,z) 为相对顶点的长方体的棱，到达点 (x,y,z) 的任一路径.

13.2　典型例题分析

13.2.1　题型一、第一类曲线积分的求解

例 13.2.1　设曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x=0\\x-y-1=0\end{cases}$，计算曲线积分 $I=\int_{\Gamma}\dfrac{x(x+8)-(y+1)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$.

解　由 Γ 的方程得

$$I=\int_{\Gamma}\frac{x^2+8x-(y+1)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}\frac{8x}{2x}\mathrm{d}s=4\int_{\Gamma}\mathrm{d}s,$$

设 Γ 的参数方程为

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,z=\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)+z'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta,$$

故

$$I=4\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=4\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta=8\pi.$$

例 13.2.2　【2008 年北京市竞赛题】设曲线 $C:x^2+xy+y^2=a^2$ 的长度为 L，计算 $I=\int_{C}\dfrac{a\sin(\mathrm{e}^x)+b\sin(\mathrm{e}^y)}{\sin(\mathrm{e}^x)+\sin(\mathrm{e}^y)}\mathrm{d}s$.

解　曲线 C 关于 $y=x$ 对称，由轮换对称性可知

$$I=\int_{C}\frac{b\sin(\mathrm{e}^x)+a\sin(\mathrm{e}^y)}{\sin(\mathrm{e}^x)+\sin(\mathrm{e}^y)}\mathrm{d}s,$$

因此

$$2I=\int_{C}(a+b)\mathrm{d}s=(a+b)L,$$

故 $I=\dfrac{a+b}{2}L$.

13.2.2　题型二、第二类曲线积分的求解

例 13.2.3　设曲线 Γ 是以 $A(1,1)$ 为圆心、半径等于 2 的圆，取逆时针方向，求

$$I=\oint_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x^2-2x+y^2-2y+1}.$$

解　由于

$$x^2-2x+y^2-2y+1=(x-1)^2+(y-1)^2-1=3\,,\quad P=\frac{1}{3},Q=\frac{1}{3}\,,$$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故 $I=\displaystyle\oint_\Gamma\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{3}=0$.

注　积分时要充分利用积分曲线的方程化简被积函数.

例 13.2.4　设 C 为光滑曲线，其弧长为 l，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 C 上连续，证明 $\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\leqslant Ml$，其中 $M=\max\limits_{(x,y,z)\in C}\{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\}$.

证　设 (x,y,z) 为 C 上任意一点，该点处的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|&=\left|\int_C(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\int_C\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\,\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_C\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,\mathrm{d}s\leqslant Ml.\end{aligned}$$

例 13.2.5　【2009 年全国竞赛预赛题】已知平面区域 $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$，L 为 D 的边界，试证:

（1）$\displaystyle\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

（2）$\displaystyle\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$.

分析　区域及区域的边界线都较简单，被积函数的形式既可考虑直接积分也适合尝试格林公式.

证　（1）**证法 1**　直接积分. 取直线路径

$$A(\pi,0)\to B(\pi,\pi)\to C(0,\pi)\to O(0,0)\,,$$

则

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\int_{\overrightarrow{OA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}+\int_{\overrightarrow{BC}}+\int_{\overrightarrow{CO}}=0+\int_0^\pi\pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0\pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x+0\\&=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\int_{\overrightarrow{OA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}+\int_{\overrightarrow{BC}}+\int_{\overrightarrow{CO}}=0+\int_0^\pi\pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0\pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x+0\\&=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

故等式成立.

证法 2　应用格林公式. 对于左边积分 $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x$，

$$P(x,y)=-y\mathrm{e}^{-\sin x},Q(x,y)=x\mathrm{e}^{\sin y}\,,\quad\frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^{-\sin x},\frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^{\sin y}\,,$$

因此

$$\text{左边}=\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

类似地，

$$\text{右边}=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

从而等式成立.

（2）**证法 1**　显然

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\geqslant 2+x^2 .$$

结合（1）的中间结论，有

$$\begin{aligned}\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\left[\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{2}\iint_D[(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})+(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin y})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\geqslant\frac{1}{2}\iint_D[(2+\sin^2 x)+(2+\sin^2 y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint_D(2+\sin^2 x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\iint_D(2+\sin^2 y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{5}{4}\pi^2+\frac{5}{4}\pi^2=\frac{5}{2}\pi^2 .\end{aligned}$$

证法 2　由于

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

且由二重积分的轮换对称性，有

$$\iint_D\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

故

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint_D(2+\sin^2 x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{2}\pi^2 .$$

例 13.2.6　【2013 年全国竞赛预赛题】设 $I_a(r)=\int_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向，求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

分析　椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$ 的方程形式不利于积分，因此考虑坐标变换.

解　令 $x=\frac{u-v}{\sqrt{2}},y=\frac{u+v}{\sqrt{2}}$，曲线 C 变成 uOv 平面上的曲线 $\Gamma:\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2$，取正向，此时

$$x^2+y^2=u^2+v^2, y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v,$$

故有 $I_a(r)=\int_\Gamma \frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^a}$. 令 $u=\sqrt{\frac{2}{3}}r\cos\theta, v=\sqrt{2}r\sin\theta$，则

$$I_a(r)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sin^2\theta\right)^a},$$

由于

$$\frac{\pi}{2^{a-1}}\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sin^2\theta\right)^a}\leqslant 2\left(\frac{3}{2}\right)^a\pi,$$

而 $\lim\limits_{r\to+\infty}r^{2(1-a)}=\begin{cases}+\infty & a<1\\ 0 & a>1\end{cases}$，因此当 $a=1$ 时，

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sin^2\theta}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\theta\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}+2\tan^2\theta}=\sqrt{3}\pi,$$

故

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}-\infty, & a<1\\ -2\pi, & a=1\\ 0, & a>1\end{cases}.$$

13.2.3 题型三、格林公式的应用

例 13.2.7 求 $I=\int_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$，其中 $C:x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，取正向.

解 记 C 所围区域为 G，令

$$P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2},$$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，添加曲线 $C_0:x=\frac{r}{2}\cos\theta, y=r\sin\theta$，取顺时针，其中 r 取足够小，使得 C_0 所围区域 $G_0\subseteq G$，则在 C 与 C_0 围成的闭域 D 上，由格林公式可知

$$\int_C+\int_{C_0}=\oint_{C+C_0}=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

而

$$\int_{C_0}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}=\int_{2\pi}^0\frac{r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta}{2r^2}\mathrm{d}\theta=-\pi,$$

所以 $I=\pi$.

注　由解题过程易知，C 为任意包含原点的分段光滑闭曲线时第二型曲线积分结果为常数 π.

例 13.2.8　计算 $u(x_0,y_0)=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s$，其中 C 为简单光滑的封闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 为其外法线单位向量，$\boldsymbol{r}$ 为连接点 (x_0,y_0) 与点 (x,y) 的向径，(x_0,y_0) 不在 C 上，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

分析　曲线 C 的方程未知，难以直接积分，被积函数中出现方向，使得考虑两类积分曲线的计算转换等式.

解　设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{n}|}=\frac{(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta}{r}.$$

此时 C 上的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(-\cos\beta,\cos\alpha)$. 从而

$$u(x_0,y_0)=\oint_C \frac{(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\mathrm{d}s=\oint_C \frac{(x-x_0)\mathrm{d}y-(y-y_0)\mathrm{d}x}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

令

$$P=\frac{-(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},Q=\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(y-y_0)^2-(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

若 C 不包围点 (x_0,y_0)，则由格林公式可知，

$$u(x_0,y_0)=\oint_C \frac{(x-x_0)\mathrm{d}y-(y-y_0)\mathrm{d}x}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=0.$$

若 C 包围点 (x_0,y_0)，则添加曲线 $C_0: x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$，取顺时针，其中 r 取得足够小，使得 C_0 所围区域含于 C 所围区域，取逆时针为 C 的正向，则在 C 与 C_0 围成的闭域 D 上，由格林公式有

$$\int_C +\int_{C_0} =\oint_{C+C_0}=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因此

$$u(x_0,y_0)=\oint_{C_0^-} \frac{(x-x_0)\mathrm{d}y-(y-y_0)\mathrm{d}x}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

例 13.2.9　【2012 年全国竞赛预赛题】设函数 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且曲线积分 $\int_L (x+2y)u\mathrm{d}x+u(x+u^3)\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

解　令 $P=(x+2y)u, Q=u(x+u^3)$，由积分与路径无关，得 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，而

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2u,\frac{\partial Q}{\partial x}=u+xu_x+4u^3u_x,$$

故

$$-u + xu_x + 4u^3u_x = 0 .$$

整理得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} - \dfrac{1}{u}x = 4u^2$，通解为

$$x = \mathrm{e}^{\ln u}\left(\int 4u^2\mathrm{e}^{-\ln u}\mathrm{d}u + C\right) = u(2u^2 + C),$$

由 $u(2) = 1$，得 $C = 0$，故 $u = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2}}$.

例 13.2.10　【2004 年北京市竞赛题】 设函数 φ,ψ 有连续导数，对平面上任意一段分段光滑的曲线 L，积分 $I = \int_L 2[x\varphi(y) + \psi(y)]\mathrm{d}x + [x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y)]\mathrm{d}y$ 与路径无关.

（1）当 $\varphi(0) = -2, \psi(0) = 1$ 时，求 $\varphi(x), \psi(x)$；

（2）设 L 是从 $O(0,0)$ 到 $N\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的分段光滑曲线，计算 I .

解　（1）令 $P = 2[x\varphi(y) + \psi(y)], Q = x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2[x\varphi'(y) + \psi'(y)], \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\psi(y) + 2y^2 - 2\varphi(y),$$

由积分与路径无关得 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即对 $\forall x, y \in R^2$，有

$$2x\psi(y) + 2y^2 - 2\phi(y) = 2(x\phi'(y) + \psi'(y)) , \tag{*}$$

令 $x = 0$ 得 $\varphi(y) + \psi'(y) = y^2$，代入（*）式得 $\psi(y) = \varphi'(y)$，再代入（*）式得

$$\varphi''(y) + \varphi(y) = y^2 .$$

上述二阶常系数非齐次微分方程的通解为

$$\varphi(y) = C_1\cos y + C_2\sin y + y^2 - 2 .$$

由 $\varphi(0) = -2, \psi(0) = 1$，即 $\varphi(0) = -2, \varphi'(0) = 1$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 1$，故 $\varphi(x) = \sin x + x^2 - 2$， $\psi(x) = \cos x + 2x$.

（2）由于积分与路径无关，故取折线 OPN，其中 $P\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}y + 2\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) + \pi\right]\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right)\pi^2 .$$

注　选择折线积分路径时，取 $P(\pi,0)$ 也可，但由于 P, Q 的函数形式，计算过程不如取 $P\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 简单.

例 13.2.11　【2010 年全国竞赛预赛题】设函数 $\varphi(x)$ 有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 $\varGamma$ 上，曲线积分 $\oint_{\varGamma}\dfrac{2xy\mathrm{d}x + \varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4 + y^2}$ 的值为常数.

（1）设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$，证明 $\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$；

（2）求函数 $\varphi(x)$；

（3）设 Γ 是围绕原点的光滑简单的正向闭曲线，求 $\oint_\Gamma \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

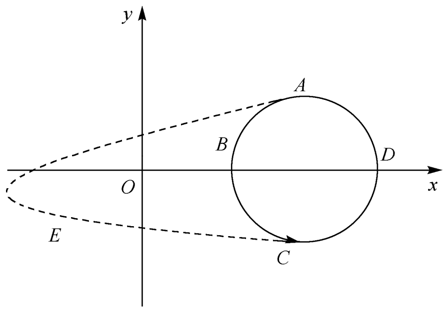

图 13.1

解　（1）如图 13.1 所示，弧 ABCDA 为有向闭曲线 L，由已知，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 Γ 上，曲线积分 $\oint_\Gamma \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数，故

$$\oint_{AECDA}=\oint_{AECBA}.$$

即

$$\int_{AEC}+\int_{CDA}=\int_{AEC}+\int_{CBA},$$

得 $\int_{CDA}=\int_{CBA}$，即

$$\int_{CDA}-\int_{CBA}=\int_{CDA}+\int_{ABC}=\oint_L=0.$$

（2）由（1）的解答过程易见，L 可以换成任意不包含原点的闭曲线 L'，均有 $\oint_{L'} \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$．设

$$P=\frac{2xy}{x^4+y^2},Q=\frac{\varphi(x)}{x^4+y^2}.$$

显然 P、Q 在连通区域 $x>0$ 内一阶偏导数连续，则在区域 $x>0$ 内的任意不包含原点的闭曲线 L' 上，积分与路径无关，故有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$．而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\varphi'(x)x^4+y^2\varphi'(x)-4\varphi(x)x^3}{(x^4+y^2)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2},$$

比较两式右端，有 $\begin{cases}\varphi'(x)=-2x\\ \varphi'(x)x^4-4\varphi(x)x^3=2x^5\end{cases}$，解得 $\varphi(x)=-x^2$.

（3）**解法 1**　取足够小的正数 r，使得区域 $[-r,r]\times[-r,r]$ 被曲线 Γ 包含，设该区域的边界为 l，取顺时针为 l 的方向，则由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，有

$$0=\oint_{\Gamma+l}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{\Gamma}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+\oint_{l}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2},$$

且

$$\oint_{l^-}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_{-r}^{r}\frac{-r^2}{r^4+y^2}\mathrm{d}y+\int_{r}^{-r}\frac{2rx}{x^4+r^2}\mathrm{d}x+\int_{r}^{-r}\frac{-r^2}{r^4+y^2}\mathrm{d}y+\int_{-r}^{r}\frac{-2rx}{x^4+r^2}\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_0^r\frac{r^2}{r^4+y^2}\mathrm{d}y+0+2\int_0^r\frac{r^2}{r^4+y^2}\mathrm{d}y+0=0,$$

故 $\oint_{\Gamma}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$.

解法 2 由已知积分与 Γ 的形状无关，故不妨取 Γ 为闭域 $D:x^4+y^2\leqslant 1$ 的正向边界，则

$$\oint_{\Gamma}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{\Gamma}2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y,$$

由格林公式，有

$$\oint_{\Gamma}2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=\iint_D -4x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又因为区域 D 关于 y 轴对称，所以

$$\oint_{\Gamma}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\iint_D -4x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

例 13.2.12 【1999 年北京市竞赛题】设 L 是不经过点 $A(2,0)$、点 $B(-2,0)$ 的分段光滑的简单闭曲线，试就 L 的不同情形计算曲线积分

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y,$$

其中 L 取正向.

分析 本题中有两个奇点，故需将积分表达式重新组合成两部分，使得每一部分含有一个奇点，利用积分与路径无关的条件，简化计算过程.

解 记 $P=P_1+P_2$，$Q=Q_1+Q_2$，其中

$$P_1=\frac{y}{(2-x)^2+y^2},P_2=\frac{y}{(2+x)^2+y^2}.$$

$$Q_1=\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2},Q_2=-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}.$$

则

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{(2-x)^2-y^2}{((2-x)^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q_1}{\partial x},\frac{\partial P_2}{\partial y}=\frac{(2+x)^2-y^2}{((2+x)^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q_2}{\partial x},$$

故有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 当 L 所围区域内不含点 A、B 时，由积分与路径无关的等价条件得，$I=0$.

当 L 所围区域内包含点 A 但不含点 B 时，取曲线 $L_1:(x-2)^2+y^2=r^2$，顺时针方向，设 L_1 所围区域为 D_1，取 r 足够小使得 D_1 含于 L 所围的区域，则

$$\begin{aligned}I&=-\oint_{L_1}(P_1+P_2)\mathrm{d}x+(Q_1+Q_2)\mathrm{d}y=-\oint_{L_1}P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y-\oint_{L_1}P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y\\&=-\oint_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x+(2-x)\mathrm{d}y}{r^2}+0=\frac{1}{r^2}\iint_{D_1}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi.\end{aligned}$$

当 L 所围区域内包含点 B 但不含点 A 时，取曲线 $L_2:(x+2)^2+y^2=\delta^2$，顺时针方向，设 L_2 所围区域为 D_2，取 δ 足够小使得 D_2 含于 L 所围的区域，可得 $I=-2\pi$. 当 L 所围区域内既包含点

A 也包含点 B 时，同时取上述 L_1 与 L_2，则

$$I=-\oint_{L_1}P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y-\oint_{L_1}P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y-\oint_{L_2}P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y-\oint_{L_2}P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y$$

$$=-\oint_{L_1}P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y-0-0-\oint_{L_2}P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y=-2\pi-2\pi=-4\pi\ .$$

例 13.2.13　求曲线积分 $I=\int_C(3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 C 为 $y=x^2-2x$ 上从原点 $O(0,0)$ 到点 $A(4,8)$ 的曲线.

解法 1　从点 $A(4,8)$ 到原点 $O(0,0)$ 添加有向线段 $C_1:y=2x$，记 C 与 C_1 围成的区域为 D，令 $P=3xy+\sin x, Q=x^2-y\mathrm{e}^y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x,\frac{\partial Q}{\partial x}=2x,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-x\ ,$$

由格林公式，有

$$\int_C+\int_{C_1}=\oint_{C+C_1}=-\iint_D-x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4x\mathrm{d}x\int_{2x}^{x^2-2x}\mathrm{d}y=-\frac{64}{3}\ ,$$

而

$$\int_{C_1}(3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=\int_4^0(\sin x+8x^2-4x\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x=\cos 4+7\mathrm{e}^8-\frac{512}{3}\ ,$$

故

$$I=-\frac{64}{3}-\cos 4-7\mathrm{e}^8+\frac{512}{3}=\frac{448}{3}-\cos 4-7\mathrm{e}^8\ .$$

解法 2　由题意

$$I=\int_C(2xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y+\int_C xy\mathrm{d}x\ ,$$

令 $P=2xy+\sin x, Q=x^2-y\mathrm{e}^y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x,\frac{\partial Q}{\partial x}=2x,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0\ ,$$

故积分与路径无关，原积分 I 的第一部分

$$\int_C(2xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=\int_0^4\sin x\mathrm{d}x+\int_0^8(16-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$$

$$=-\cos 4-7\mathrm{e}^8+128,$$

原积分 I 的第二部分

$$\int_C xy\mathrm{d}x=\int_0^4x(x^2-2x)\mathrm{d}x=\frac{64}{3}\ ,$$

故 $I=\dfrac{448}{3}-\cos 4-7\mathrm{e}^8$.

例 13.2.14　设 $f(x,y)$ 有连续的偏导，且 $f(0,0)=0$，满足当 $x^2+y^2\leqslant 5$ 时 $|\mathbf{grad}f|\leqslant 1$，证明 $|f(1,2)|\leqslant\sqrt{5}$.

证 记$u=f(x,y)$，则$\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y$，又$f(x,y)$有连续的偏导，故积分$\int_C f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y$与路径无关，从而

$$f(1,2)=f(0,0)+\int_{(0,0)}^{(1,2)}f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{\partial f(x,2x)}{\partial x}+2\frac{\partial f(x,2x)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x,$$

故

$$|f(1,2)|\leqslant\int_0^1\left|\frac{\partial f(x,2x)}{\partial x}+2\frac{\partial f(x,2x)}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\sqrt{5}\sqrt{f_x^2+f_y^2}\ \mathrm{d}x\leqslant\sqrt{5}\,|\,\mathbf{grad}f\,|\leqslant\sqrt{5}\ .$$

13.2.4 题型四、第一类曲面积分的求解

例 13.2.15 求$I=\iint\limits_S(x+2y+3z+4)^2\mathrm{d}S$，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$.

解 由题意

$$I=\iint\limits_S(x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz+8x+16y+24z+16)\mathrm{d}S\ .$$

由于球面关于三坐标面对称，故根据轮换对称性，有

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S,$$

从而

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint\limits_S R^2\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi R^4\ .$$

又由奇函数积分化简的结果，得

$$\iint\limits_S(4xy+6xz+12yz+8x+16y+24z)\mathrm{d}S=0,$$

故原式=$\dfrac{56}{3}\pi R^4+64\pi R^2$.

注 函数积分时，结合区域与函数的对称性来得到变量轮换后的积分相等，或利用函数的奇偶性化简是常要注意的.

例 13.2.16 【2011 年全国竞赛决赛题】已知$\varSigma$是空间曲线$\begin{cases}x^2+3y^2=1\\z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转而成的椭球面，$S$表示曲面$\varSigma$的上半部分（$z\geqslant0$），$\varPi$是椭球面$S$在点$P(x,y,z)$处的切平面，$\rho(x,y,z)$是原点到切平面$\varPi$的距离，$\lambda,\mu,\nu$表示$S$的外法线方向余弦.

（1）计算$\iint\limits_S\dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；

（2）计算$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\mathrm{d}S$，其中$\varSigma$为外侧.

解 （1）$\varSigma$的方程为$x^2+3y^2+z^2=1$，设$F(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2-1$，则椭球面在$P(x,y,z)$处的法向量为$(F_x,F_y,F_z)|_P=(2x,6y,2z)|_P$，故$\varSigma$在点$P(x,y,z)$处的切平面方程为：

$$2x(X-x)+6y(Y-y)+2z(Z-z)=0,$$

即 $xX+3yY+zZ=1$．从而 $\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}$．曲面 S 的方程变形为

$$z=\sqrt{1-x^2-3y^2}, z_x=-\frac{x}{z}, z_y=-\frac{3y}{z}.$$

面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{1+6y^2}}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

且在曲面 S 上有

$$\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+6y^2}}.$$

由于 Σ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+3y^2\leqslant 1$，故令

$$x=r\cos\theta, y=\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta, 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant r\leqslant 2\pi,$$

则

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S&=\iint\limits_{D_{xy}}(1+6y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1+2r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\pi+2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\pi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi.\end{aligned}$$

（2）补充 xOy 面上的椭圆 $S_1:\begin{cases}x^2+3y^2=1\\z=0\end{cases}$，取下侧，则 S_1 与 S 构成封闭曲面 S_2，记

$$P(x,y,z)=zx, Q(x,y,z)=3zy, R(x,y,z)=z^2,$$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=z,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=3z,\dfrac{\partial R}{\partial z}=2z$．对曲面 S_1，其上的单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(0,0,-1).$$

对曲面 S，其上的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\lambda,\mu,v)$，则

$$\begin{aligned}&\oiint\limits_{S_2}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_1}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+vz)\mathrm{d}S+0\end{aligned}$$

又由高斯公式有

$$\oiint\limits_{S_2}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

令 $x=r\sin\varphi\cos\theta,y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\varphi\sin\theta,z=\cos\theta$，则

$$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+vz)\mathrm{d}S=6\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\,.$$

例 13.2.17　【2005 年北京市竞赛题】设曲面 $\varSigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上的点 (x,y,z) 处的切平面为 $\varPi$，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\varSigma}\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{dS}$，其中 λ 是坐标原点到 $\varPi$ 的距离.

解　点 $P(x,y,z)$ 处的切平面方程为

$$\varPi:\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1\,.$$

故 $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}$. 设曲面 $\varSigma_1:z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$， D_{xy} 为 $\varSigma$ 在 xOy 面上的投影，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-cx}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-cy}{b^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\,.$$

又因为 $\varSigma$ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$， $\varSigma$ 关于 xOy 面对称，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 z 的偶函数，故

$$I=2\iint\limits_{\varSigma_1}\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}S=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\frac{c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2c\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{1}{c^2}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $x=a\rho\cos\theta,y=b\rho\sin\theta,(0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则 $J=ab\rho$，从而

$$I=\frac{2abc}{a^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho+\frac{2abc}{b^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$
$$+\frac{2abc}{c^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{4bc\pi}{3a}+\frac{4ac\pi}{3b}+\frac{4ab\pi}{3c^2}=\frac{4abc}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\pi.$$

例 13.2.18　【2011 年全国竞赛预赛题】设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，记第一类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$，求证 $I=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\mathrm{d}u$.

分析　要在 $ax+by+cz$ 与 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}u$ 之间建立联系，易联想到平面方程及原点到平面的距离，由于第一型曲面积分 I 是建立于球面 Σ 之上，故考虑平面与球面的交线，以便能将曲面面积元素 $\mathrm{d}S$ 能以矩形面积的形式写出，进而计算曲面积分可以向定积分转化.

证　Σ 的面积等于 4π，当 $a=b=c=0$ 时，

$$I=\iint\limits_{\Sigma}f(0)\mathrm{d}S=4\pi f(0)=2\pi\int_{-1}^{1}f(0)\mathrm{d}u\ .$$

等式成立．当 a,b,c 不全为零时，原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离为 $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

设平面族 $\Pi_u:u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，取定 u 值时，$|u|$ 为原点到平面 Π_u 的距离，当且仅当 $-1\leqslant u\leqslant 1$ 时，平面 Π_u 与球面 Σ 相交，交线满足 $f(ax+by+cz)=f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)$.

两平面 Π_u 与 $\Pi_{u+\mathrm{d}u}$ 所夹球面的面积记为面积微元 $\mathrm{d}S$，则以长 $2\pi\sqrt{1-u^2}$ 、宽 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$ 的长方形面积来表示 $\mathrm{d}S$，即

$$\mathrm{d}S=2\pi\sqrt{1-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=2\pi\mathrm{d}u\ .$$

故

$$I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\mathrm{d}u\ .$$

例 13.2.19　设球面 $\Sigma:(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$，证明: 曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)^3\mathrm{d}S\geqslant 108\pi a^5\quad(a>0)$.

分析　球面面积 $S=4\pi a^2$，而 $\dfrac{108\pi a^5}{4\pi a^2}=27a^3=(3a)^3$，故考察 $x+y+z+\sqrt{3a}\geqslant 3a$ 的条件.

证　球面 Σ 上一点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为

$$(x_0-a)x+(y_0-a)y+(z_0-a)z=(x_0-a)x_0+(y_0-a)y_0+(z_0-a)z_0\ ,$$

当 $\dfrac{x_0-a}{1}=\dfrac{y_0-a}{1}=\dfrac{z_0-a}{1}$，即 $x_0=y_0=z_0$ 时，切平面与平面 $x+y+z=3a-\sqrt{3a}$ 平行，且当

$x_0=y_0=z_0=a-\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$ 时，平面 $x+y+z=3a-\sqrt{3a}$ 即为已知球面在点 $\left(a-\dfrac{\sqrt{3}a}{3},a-\dfrac{\sqrt{3}a}{3},a-\dfrac{\sqrt{3}a}{3}\right)$ 的切平面，此时球面在平面的上方，故 $\forall(x,y,z)\in\Sigma$，有 $x+y+z\geqslant 3a-\sqrt{3a}$，从而

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)^3\mathrm{d}S\geqslant 27a^3\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=108\pi a^5 .$$

13.2.5　题型五、第二类曲面积分的求解

例 13.2.20　求 $\iint\limits_{\Sigma}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $x^2+y^2=4$ 被 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截部分的外侧.

解　Σ 在 xOz 面上的投影区域为 $D_{zx}:0\leqslant z\leqslant 2-x,-2\leqslant x\leqslant 2$，$\Sigma$ 在 xOy 面上的投影为一条曲线，且函数 $-y$ 是 y 的奇函数，故

$$\text{原式}=-2\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0=-2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\int_0^{2-x}\mathrm{d}z=-2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}(2-x)\mathrm{d}x$$

$$=-8\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=-8\left[2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right]_0^2=-8\pi.$$

例 13.2.21　设 Σ 为 $x-y+z=1$ 在第四象限部分的上侧，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(f+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2f+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(f+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

分析　$f(x,y,z)$ 表达式未知，分别求三个对坐标的曲面积分难以进行，易见 Σ 的法向量恰能使得用同一投影法消去 f .

解　Σ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，其在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:x-1\leqslant y\leqslant 0,0\leqslant x\leqslant 1$，则由同一投影法，有

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}(f+x,2f+y,f+z)\cdot(1,-1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{0}(x-y+1-x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

13.2.6　题型六、高斯公式的应用

例 13.2.22　求 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解　令 $P=x^2,Q=y^2,R=z^2$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=2y,\dfrac{\partial R}{\partial z}=2z$，由高斯公式有

$$I=2\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iiint\limits_V(x-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\iiint\limits_V(y-b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\iiint\limits_V(z-c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\iiint\limits_V(a+b+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=0+0+0+2\cdot\frac{4}{3}\pi(a+b+c)R^3=\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3.$$

注　此方法将三重积分的被积函数变形后可结合函数的奇偶性与区域的对称性化简，也可以考虑坐标变换，令 $u=x-a, v=y-b, w=z-c$ 来求三重积分.

例 13.2.23　【2002 年北京市竞赛题】设 $f(x)$ 有连续的导函数，计算

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

其中 Σ 是 $y=x^2+z^2+6, y=8-x^2-z^2$ 所围立体表面的外侧.

分析　由于 $f(x)$ 未知，故难以直接积分，而 Σ 是两张曲面的组合，故同一投影法积分需要分曲面进行，从计算量的角度来看并非首选方法，而封闭曲面及 $f(x)$ 有连续的导函数的条件适宜运用高斯公式.

解　记

$$P=\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right),\quad Q=\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right),\quad R=z\,,$$

由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right),\frac{\partial Q}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right),\frac{\partial R}{\partial z}=1\,,$$

从而有 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$，由 $\begin{cases}y=x^2+z^2+6\\ y=8-x^2-z^2\end{cases}$ 得 Σ 在 xOz 面上的投影区域 $D_{zx}:x^2+z^2\leqslant 1$，由高斯公式，有

$$I=\iiint_V \mathrm{d}v=\iint_{D_{zx}}2(1-x^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\pi\,.$$

例 13.2.24　求 $I=\oiint_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为不过原点的简单闭曲面的外侧.

解　令 $P=\dfrac{x}{r^3}, Q=\dfrac{y}{r^3}, R=\dfrac{z}{r^3}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^6},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^6},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3y^2}{r^6}\,,$$

从而 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$. 记 Σ 所围空间区域为 Ω.

当 Σ 不包含原点时，积分与曲面无关，得 $I=0$.

当 Σ 包含原点时，取足够小的 δ，使得球面 $\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=\delta^2$ 含于 Ω，现取球面的内侧，由高斯公式得 $\oiint_{\Sigma}+\oiint_{\Sigma_1}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}v=0$，而

$$\oiint_{\Sigma_1}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{2}{\delta^3}\iint_{D_{yz}}\sqrt{\delta^2-x^2-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{2}{\delta^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\delta}\sqrt{\delta^2-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2}{\delta^3}\left[-\frac{(\delta^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{\delta}=-\frac{4}{3}\pi\,,$$

类似可得 $\oiint\limits_{\Sigma_1}\dfrac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\oiint\limits_{\Sigma_1}\dfrac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{4}{3}\pi$，故 $I=4\pi$.

例 13.2.25　【2014 年全国竞赛决赛题】设函数 $f(x)$ 连续可导，$P=Q=R=f((x^2+y^2)z)$，有向曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2,0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面，方向朝外.记第二类曲面积分 $I_t=\iint\limits_{\Sigma_t}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

分析　圆柱体表面形状简单，而直接对曲面积分需要分块，故考虑高斯公式.

解　设 Σ_t 所围立体为 Ω，

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2xzf',\frac{\partial Q}{\partial y}=2yzf',\frac{\partial R}{\partial z}=(x^2+y^2)f'，$$

由高斯公式有

$$I_t=\iiint\limits_{\Omega}(2xz+2yz+x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}v，$$

由于 Ω 分别关于 yOz 面与 xOz 面对称，故

$$\iiint\limits_{\Omega}2xzf'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}2yzf'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}v=0，$$

从而 $I_t=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}v$，由柱面坐标变换有

$$I_t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\mathrm{d}r\int_0^1 f'(r^2z)r^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\,f(r^2z)\Big|_0^1\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t r(f(r^2)-f(0))\mathrm{d}r\ .$$

故

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I_t}{t^4}=\lim_{r\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t r(f(r^2)-f(0))\mathrm{d}r}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi(f(t^2)-f(0))}{4t^2}=\frac{f'(0)}{2}\pi .$$

例 13.2.26　【2013 年全国竞赛预赛题】设 Σ 是一个光滑闭曲面，方向朝外，给定第二类的曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值.

分析　由于 Σ 是未知曲面，故直接进行曲面积分不合适，可以利用高斯公式转化为讨论一个函数在三维空间里的积分.

解　设 Σ 所围空间区域为 Ω，记 $P=x^3-x,Q=2y^3-y,R=3z^3-z$，由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2-1,\frac{\partial Q}{\partial y}=6y^2-1,\frac{\partial R}{\partial Z}=9z^2-1，$$

由高斯公式有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial Z}\right)\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

要使 I 最小，应考虑 $x^2+2y^2+3z^2-1\leqslant 0$ 的积分区域，取 $\Omega:x^2+2y^2+3z^2\leqslant 1$，即 Ω 为一个椭

球，当 Σ 取成其表面时，可使积分 I 最小. 令

$$x=r\cos\varphi\sin\theta, y=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\varphi\sin\theta, z=\frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\theta, r\in[0,1], \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi],$$

则 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\dfrac{r^2\sin\theta}{\sqrt{6}}$，故有

$$I=3\iiint_{\Omega}(r^2-1)|J|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)r^2\sin\theta\mathrm{d}r=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi.$$

13.2.7　题型七、斯托克斯公式的应用

例 13.2.27　设曲线 C：$\begin{cases}x^2+y^2=2y\\ y=z\end{cases}$，从 x 轴的正向看为顺时针方向，证明：曲线积分 $\oint_C y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z=0$.

解　记 Σ 为曲线 C 在平面 $y=z$ 上所围成的椭圆，取下侧，则 $(0,-1,1)$ 为 Σ 的法向量，Σ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 2y$. 设 $P=y^2, Q=xy, R=xz$，则

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=-z, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-y,$$

由斯托克斯公式，

$$\oint_C y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}-z\mathrm{d}z\mathrm{d}x-y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

再由同一投影法，

$$\iint_{\Sigma}-z\mathrm{d}z\mathrm{d}x-y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}(0,-z,-y)\cdot(0,-1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}(y-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

注　由于 Σ 上取定侧的任一点的单位法向量为常向量，其方向余弦为 $0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故也可以利用两类曲面积分间的关系化简，

$$\iint_{\Sigma}-z\mathrm{d}z\mathrm{d}x-y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{\Sigma}(-z+y)\,\mathrm{d}S=0.$$

例 13.2.28　计算 $I=\oint_C(y-x)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$C$ 为柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1\,(a,h>0)$ 的交线，从 x 轴正向看去，曲线方向为逆时针.

解法 1　记平面被柱面所截位于柱面内的平面区域为 Σ，取上侧，Σ 的方向向量为 $\left(\dfrac{h}{a},0,1\right)$，$\Sigma$ 在 xOy 面上的投影为圆

$$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2，令 P=y-x, Q=z-x, R=x-y,$$

则

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=-2,\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=-2,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2\ ,$$

由斯托克斯公式及同一投影法，有

$$I=-2\iint_{D_{xy}}(1,1,1)\cdot\left(\frac{h}{a},0,1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D_{xy}}\left(\frac{h}{a}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi a(a+h)\ .$$

解法 2　令 $x=a\cos\theta,y=a\sin\theta,z=h(1-\cos\theta)$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}[-a(a\cos\theta-h+h\cos\theta)a\sin\theta+(h-h\cos\theta-a\cos\theta)a\cos\theta\\&\quad+(a\cos\theta-a\sin\theta)h\sin\theta]\mathrm{d}\theta\\&=-\int_0^{2\pi}[a^2+ah+ah(\sin\theta-\cos\theta)]\mathrm{d}\theta=-2\pi a(a+h).\end{aligned}$$

13.2.8　题型八、曲线、曲面积分的实际应用

例 13.2.29　【2011 年全国竞赛预赛题】平面上有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 ρ，在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 m 的质点，求射线对该质点的引力.

解　在 x 轴上 $x(x\geqslant a)$ 处起取一小段 $\mathrm{d}x$，质量为 $\rho\mathrm{d}x$，质点到其距离为 $\sqrt{h^2+x^2}$，这一段对质点的引力微元为 $\mathrm{d}F=\dfrac{Gm\rho\mathrm{d}x}{h^2+x^2}$（$G$ 为引力常数）. 该引力在水平方向的分量为 $\mathrm{d}F_x=\dfrac{Gm\rho x\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{3/2}}$，故

$$F_x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho x\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{3/2}}=-\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+x^2}}\Bigg|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}\ .$$

$\mathrm{d}F$ 在竖直方向的分量为 $\mathrm{d}F_y=\dfrac{Gm\rho h\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{3/2}}$，故

$$F_y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho h\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2t\mathrm{d}t}{h^3\sec^3t}=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right),$$

从而所求引力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y)$.

例 13.2.30　【2013 年全国竞赛决赛题】设曲面 $\Sigma:z^2=x^2+y^2,1\leqslant z\leqslant 2$，其面密度为常数 ρ. 求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力.

解　设引力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$，由于质点在原点，而 Σ 分别关于 xOz 面和 yOz 面对称，故 $F_x=F_y=0$. 设 $P(x,y,z)$ 为曲面 Σ 上的任意一点，与原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，射线 OP 与 z 轴的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则

$$\frac{z}{r}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

质点与曲面微元之间的引力为 $\mathrm{d}F=G\dfrac{\rho\mathrm{d}S}{r^2}$，由于

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\rho\mathrm{d}S}{r^2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}G\rho}{2r^2}\mathrm{d}S,$$

故 $F_z = \iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}F_z = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\sqrt{2}G\rho}{2r^2}\mathrm{d}S$. 在区间$[1,2]$上取$[z,z+\mathrm{d}z]$，曲面上对应的面积微元为

$$\mathrm{d}S = 2\pi z\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}z = 2\sqrt{2}\pi z\mathrm{d}z,$$

因此

$$F_z = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\sqrt{2}G\rho}{2r^2}\mathrm{d}S = \int_1^2\frac{\sqrt{2}G\rho}{2(\sqrt{2}z)^2}2\sqrt{2}\pi z\mathrm{d}z = \int_1^2\frac{G\rho\pi}{z}\mathrm{d}z = G\rho\pi\ln 2,$$

故引力为 $\boldsymbol{F} = (0,0,G\rho\pi\ln 2)$.

例 13.2.31　设一力场 $\boldsymbol{F}$ 的大小与作用点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离成正比（比例系数为 $k>0$），方向总是指向原点，质点受 $\boldsymbol{F}$ 的作用从点 $A(0,0,\mathrm{e})$ 沿螺旋线 $x=\frac{1}{2}(1+\cos t), y=\sin t$, $z=\frac{\mathrm{e}}{\pi}t$ 到点 $B(1,0,0)$，求力场 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的功 W.

解　记 $r=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，有

$$\boldsymbol{F} = -kr\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right) = -k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}).$$

由于 A 点对应参数 $t=\pi$，B 点对应参数 $t=0$，因此

$$\begin{aligned}W &= \int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}r = -k\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z = -k\int_\pi^0\left(\frac{1+\cos t}{4}(-\sin t)+\sin t\cos t+\frac{\mathrm{e}^2}{\pi^2}t\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}k.\end{aligned}$$

例 13.2.32　【2010 年全国竞赛预赛题】设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ)（其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$（其中 $0<c<b<a$，密度为 1）绕 l 轴旋转.

（1）求其转动惯量；（2）求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值.

解　（1）设椭球所围区域为 Ω，任意一点 $(x,y,z)\in\Omega$，由于 l 过原点，故由勾股定理，该点到直线 l 的距离为

$$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2-[(x,y,z)\cdot(\alpha,\beta,\gamma)]^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2}.$$

椭球对直线 l 的转动惯量为

$$\begin{aligned}I &= \iiint\limits_{\Omega}d^2\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}\left[x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\right]\mathrm{d}V\\ &= \iiint\limits_{\Omega}\left[(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\gamma\alpha zx\right]\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

由 Ω 关于三个坐标面均对称，得

$$\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}yz\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}zx\mathrm{d}V = 0.$$

故

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left[(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

由坐标轴投影法，得

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}x^2\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\pi a^3bc\ .$$

同理得

$$\iiint\limits_{\Omega}y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi ab^3c,\quad \iiint\limits_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3\ .$$

故椭球对直线 l 的转动惯量为

$$I=\frac{4}{15}\pi abc[(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2]\ .$$

（2）由于 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$，且 $0<c<b<a$，故当 $\alpha^2=0,\beta^2=0,\gamma^2=1$（绕 z 轴）时取得 I 的最大值 $I_{\max}=\dfrac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2)$；当 $\alpha^2=1,\beta^2=0,\gamma^2=0$（绕 x 轴）时取得 I 的最小值

$$I_{\min}=\frac{4}{15}\pi abc(b^2+c^2)\ .$$

13.3　深 化 训 练

13.3.1　设曲线 $\varGamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y=0\end{cases}$，计算曲线积分 $I=\displaystyle\int_{\varGamma}\frac{(x+2)^2+(y-1)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$.

13.3.2　【2005 年北京市竞赛题】设曲线 $L:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的周长为 l，求积分 $I=\displaystyle\oint_L(x+2y)^2\mathrm{d}s$.

13.3.3　证明：若 C 为简单光滑的封闭平面曲线，$\boldsymbol{\tau}$ 为其切向量，$\boldsymbol{l}$ 为任意固定方向，则曲线积分 $\displaystyle\oint_C\sin(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{l})\mathrm{d}s=0$.

13.3.4　将曲线积分 $\displaystyle\int_C f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ 化为定积分，其中 $f(x)$ 连续，C 为从 $(0,0)$ 到 (a,b) 的光滑曲线.

13.3.5　设曲线 $\varGamma$：$y=\cos\dfrac{\pi}{2}x, x\in[-1,1]$，取逆时针方向，计算曲线积分 $I=\displaystyle\int_{\varGamma}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

13.3.6　计算 $I=\displaystyle\int_C[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$，其中 C 为从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的任一条路径，它与线段 AB 不交（A、B 点除外），且围成的面积为 S，$\varphi(y)$ 有连续的导数.

13.3.7　【2002 年北京市竞赛题】设当 $\alpha \to 0$ 时，$I_\alpha = \oint_C \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+xy)^2}$（其中 C 为有向圆周 $x^2+y^2=\dfrac{1}{\alpha^2}$）与 α^n 为同阶无穷小，求 n．

13.3.8　【2012 年全国竞赛决赛题】设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$（其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数）唯一确定，L 为正向单位圆周，试求 $I=\oint_L (xz^2+2yz)\mathrm{d}y - (2xz+yz^2)\mathrm{d}x$．

13.3.9【1999 年北京市竞赛题】　设 $\varGamma$ 为不自交的光滑闭曲线，求曲线积分 $\oint_\varGamma \mathrm{grad}[\sin\ (x+y+z)]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$．

13.3.10　【2007 年北京市竞赛题】设 L 为封闭曲线 $|x|+|x+y|=1$ 的正向一周，求 $I=\oint_L x^2y^2\mathrm{d}x - \cos(x+y)\mathrm{d}y$．

13.3.11　【2002 年北京市竞赛题】　设曲面 $\varSigma: x^2+y^2+z^2=4$，求 $\iint\limits_\varSigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S$．

13.3.12　设

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$\varSigma$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，求曲面积分 $I=\iint\limits_\varSigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$．

13.3.13　【2000 年北京市竞赛题】　设 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分（$z>0$），点 $P\in S$，$\varPi$ 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为原点到平面 $\varPi$ 的距离，求 $I=\iint\limits_S z^3\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$．

13.3.14　【2006 年北京市竞赛题】证明 $I=\iint\limits_\varSigma (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}S\leqslant\dfrac{2\pi}{15}(8\sqrt{2}-7)$，其中 $\varSigma$ 为抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 夹在平面 $z=0$ 和 $z=\dfrac{t}{2}\,(t>0)$ 之间的部分.

13.3.15　【2010 年全国竞赛决赛题】计算 $I=\iint\limits_\varSigma \dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $\varSigma$ 为下半球 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

13.3.16　求 $I=\iint\limits_\varSigma 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\varSigma$ 为由曲线 $x=\mathrm{e}^y\ (0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转所得曲面的外侧.

13.3.17　设 $\varSigma$ 为曲面 $az=x^2+y^2\ (0\leqslant z\leqslant a)$ 的第一卦限部分的上侧，求曲面积分 $\iint\limits_\varSigma x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

13.3.18　【2007 年北京市竞赛题】计算 $I=\iint\limits_\varSigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\varSigma:(x-1)^2+(y-1)^2+\dfrac{z^2}{4}=1\,(y\geqslant 1)$，取外侧.

13.3.19　【2008 年北京市竞赛题】设函数 $f(x)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意光滑简单闭曲面 S 上，积分 $\oiint\limits_{S} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值恒为同一常数.

（1）证明：对空间区域 $x>0$ 内的任意光滑简单闭曲面 Σ，有

$$\oiint\limits_{\Sigma} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\text{；}$$

（2）求函数 $f(x)\ (x>0)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ 的表达式.

13.3.20　【2007 年北京市竞赛题】设函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在闭区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上有一阶连续偏导数，又 $\boldsymbol{f}(x,y)=v(x,y)\boldsymbol{i}+u(x,y)\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{g}(x,y)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}$，且在 D 的边界上有 $u(x,y)\equiv 1, v(x,y)\equiv y$，求 $I=\iint\limits_{D}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\sigma$.

13.3.21　求一个密度为 ρ 的均匀球壳对一个在球外的质点产生的引力，证明该引力等于球壳的质量全部集中于其球心时所产生的引力.

13.3.22　已知曲面 S 由锥面 $S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $S_2: z=1$ 所围锥体表面的外侧，求向量场 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 对 S 的通量.

13.4　深化训练详解

13.3.1　由 Γ 的方程得

$$I=\int_{\Gamma}(x+2)^2+(y-1)^2\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}(2x^2+6x+5)\mathrm{d}s\text{，}$$

设 Γ 的参数方程为 $\Gamma: x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, z=\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)+z'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta\text{，}$$

故

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta+\frac{6}{\sqrt{2}}\cos\theta+5\right)\mathrm{d}\theta=11\pi\text{.}$$

13.3.2　由题意

$$\oint_L (x+2y)^2\mathrm{d}s=4\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)\mathrm{d}s+\oint_L 4xy\mathrm{d}s\text{，}$$

由于 L 关于 x 轴（或 y 轴）对称，故 $\oint_L 4xy\mathrm{d}s=0$，所以 $I=4l$.

13.3.3　设 $\boldsymbol{n}$ 为其外法线方向，则 $\sin(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{l})=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$，记单位切向量 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{e}}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{e}}=(-\cos\beta,\cos\alpha)$，设 $\boldsymbol{l}_{\mathrm{e}}=(l_1,l_2)$，则

$$\sin(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{l})=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=-l_1\cos\beta+l_2\cos\alpha\text{，}$$

则由格林公式得

$$\oint_C \sin(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{l})\mathrm{d}s=\oint_C(-l_1\cos\beta+l_2\cos\alpha)\mathrm{d}s=\oint_C l_2\mathrm{d}x-l_1\mathrm{d}y=0\,.$$

13.3.4　令 $u=x+y$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，记 $F(x,y)=\int_0^{x+y}f(u)\mathrm{d}u$，故

$$\int_C f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\int_0^{a+b}f(u)\mathrm{d}u\,.$$

注　本题由于 $f(x)$ 不具有导函数连续性，故不能应用积分与路径无关来求解.

13.3.5　记 $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

在不含 $(0,0)$ 点的区域内，积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，取路径

$$A(1,0)\to B(1,1)\to C(-1,1)\to D(-1,0)\,,$$

则

$$\begin{aligned}I&=\int_{\overrightarrow{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BC}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{CD}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{1+y}{1+y^2}\mathrm{d}y+\int_1^{-1}\frac{x-1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^0\frac{-1+y}{1+y^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi.\end{aligned}$$

注　考虑到 $P(x,y),Q(x,y)$ 的函数形式，也可取路径圆心为 $(0,0)$，半径为 1 的上半单位圆周，逆时针方向，利于计算.

13.3.6　令 $P=\varphi(y)\mathrm{e}^x-my$，$Q=\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m\,,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\varphi'(y)\mathrm{e}^x\,,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=m\,.$$

当 C 在线段 AB 下方时，$\oint_{C+\overrightarrow{BA}}=\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}x=mS$，而

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{BA}}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y&=\int_1^0[\varphi(x)\mathrm{e}^x-mx+\varphi'(x)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}x\\&=\left[\varphi(x)\mathrm{e}^x-m\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]\Bigg|_1^0=\varphi(0)-\varphi(1)\mathrm{e}+\frac{3}{2}m,\end{aligned}$$

故

$$I=\varphi(1)\mathrm{e}-\varphi(0)+mS-\frac{3}{2}m\,.$$

当 C 在线段 AB 上方时，

$$\oint_{C+\overrightarrow{BA}}=-\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}x=-mS\,,\quad I=\varphi(1)\mathrm{e}-\varphi(0)-mS-\frac{3}{2}m\,.$$

13.3.7　设 $C:x=\dfrac{1}{\alpha}\cos t,y=\dfrac{1}{\alpha}\sin t$，则

$$I_\alpha=\oint_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+xy)^2}=\alpha^2\int_0^{2\pi}\frac{-1}{(1+\sin t\cos t)^2}\mathrm{d}t,$$

$\int_0^{2\pi}\frac{-1}{(1+\sin t\cos t)^2}\mathrm{d}t$ 是有限数，故当 $\alpha\to 0$ 时，I_α 与 α^2 是同阶无穷小，即 $n=2$．

13.3.8　由已知关于 $z=z(x,y)$ 的隐函数条件，易联想到 z_x 与 z_y，L 为闭曲线，因此该第二型曲线积分应考虑格林公式．由于 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$ 确定，令

$$G(x,y,z)=F(xz-y,x-yz),$$

则

$$G_x=zF_1'+F_2',\quad G_y=-F_1'-zF_2',\quad G_z=xF_1'-yF_2',$$

从而

$$z_x=-\frac{zF_1'+F_2'}{xF_1'-yF_2'},\quad z_y=\frac{F_1'+zF_2'}{xF_1'-yF_2'}.$$

令 $P=-2xz-yz^2,Q=xz^2+2yz$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2xz_y-z^2-2yzz_y,\frac{\partial Q}{\partial x}=z^2+2xzz_x+2yz_x,$$

因此

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(xz+y)z_x+2(x+yz)z_y+2z^2=2(1-z^2)+2z^2=2,$$

由格林公式得

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$$

13.3.9　由题意

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \mathrm{grad}[\sin(x+y+z)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\oint_\Gamma(\cos(x+y+z),\cos(x+y+z),\cos(x+y+z))\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\\&=\oint_\Gamma\cos(x+y+z)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=\oint_\Gamma\mathrm{d}\sin(x+y+z),\end{aligned}$$

由积分与路径无关的等价条件，得

$$\oint_\Gamma \mathrm{grad}[\sin(x+y+z)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0.$$

13.3.10　设 L 所围区域为 D，由格林公式，有

$$I=\iint\limits_D(\sin(x+y)-2x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $\begin{cases}u=x+y\\v=x\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=v\\y=u-v\end{cases}$，$J=\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1$，则 $D\to D'$，其中 $D':|u|+|v|\leqslant 1$，有

$$I=\iint\limits_{D'}(\sin u-2uv^2+2v^3)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

由于 D' 关于 u 轴、v 轴对称，$\sin u-2uv^2$ 是 u 的奇函数，$2v^3$ 是 v 的奇函数，故

$$I=\iint_{D'}(\sin u-2uv^2+2v^3)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0.$$

13.3.11　由于 Σ 关于三个坐标面对称，故 $\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S$，从而

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\cdot4\cdot4\pi\cdot2^2=\frac{128}{3}\pi.$$

13.3.12　联立 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}\end{cases}$，得空间区域 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}$，由曲面方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，得

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}，\quad\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}，$$

故

$$I=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r=\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\pi.$$

13.3.13　点 $P(x,y,z)$ 处的切平面方程为 $\frac{x}{2}X+\frac{y}{2}Y+zZ=1$，故

$$\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}},$$

S 可以化为 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}，\quad\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}},$$

由于 S 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\leqslant1$，故

$$I=\iint_{S}z^3\rho(x,y,z)\mathrm{dS}=\iint_{D_{xy}}\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)}}\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho=\pi.$$

13.3.14　Σ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant t$，即

$$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta\,(0\leqslant\rho\leqslant t, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\frac{\partial z}{\partial y}=y,\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2},$$

因此

$$\begin{aligned}I(t)&=\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho(1-\rho^2)\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\int_0^t\rho(1-\rho^2)\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

由于 $I'(t)=2\pi t(1-t^2)\sqrt{1+t^2}$，令 $I'(t)=0$ 得 $t=1$ 为惟一驻点，当 t 从负数跨越零点到正数时 $I(t)$ 由负数变成正数，故 $t=1$ 为最大值点，此时 $I(t)$ 有最大值：

$$I(1)=2\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^1(1-\rho^2)\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho^2=\frac{2\pi}{15}(8\sqrt{2}-7).$$

13.3.15　Σ 在 yOz 平面上的投影区域为 $D_{yz}:y^2+z^2\leqslant a^2, z\leqslant 0$；在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2$，

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\iint_{\Sigma}\frac{(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\&=-2\iint_{D_{yz}}\frac{a\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}}{a}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}[a-\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-2\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r+\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2)r\mathrm{d}r\\&=-\frac{2}{3}\pi a^3+\frac{1}{6}\pi a^3=-\frac{\pi}{2}a^3.\end{aligned}$$

13.3.16　由已知，旋转曲面为 $\Sigma:x=\mathrm{e}^{\sqrt{y^2+z^2}}$，补充平面区域 $\Pi:x=\mathrm{e}^a\ (y^2+z^2\leqslant a^2)$，取前侧，则 Σ 与 Π 围成封闭曲面，且该曲面在 yOz 面上的投影区域为 $D_{yz}:y^2+z^2\leqslant a^2$.令 $P=2(1-x^2),Q=8xy,R=-4xz$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-4x,\frac{\partial Q}{\partial y}=8x,\frac{\partial R}{\partial z}=-4x,$$

由高斯公式得 $\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Pi}=\oiint\limits_{\Sigma+\Pi}=\iiint\limits_{V}0\mathrm{d}v=0$，而

$$\iint_{\Pi}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{yz}}2(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi a^2(1-\mathrm{e}^{2a}),$$

故 $I=2\pi a^2(\mathrm{e}^{2a}-1)$.

13.3.17　Σ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-\frac{2x}{a},-\frac{2y}{a},1\right)$，其在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2$，则

由同一投影法，有

$$原式=\iint_{\Sigma}(x^2z,y^2z,z^2x)\cdot\left(-\frac{2x}{a},-\frac{2y}{a},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)(-x^3+xy^2-2y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^3\theta+\cos\theta\sin^2\theta-2\sin^3\theta)d\theta\int_0^a\rho^6\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{a^7}{7}=-\frac{5}{21}a^5 .$$

注　当曲面非封闭时，采用同一投影法计算第二型的曲面积分往往事半功倍.

13.3.18　补充平面 $\Sigma_0: y=1, (x-1)^2+\frac{z^2}{4}\leqslant 1$，取左侧，$\Sigma_0$ 与 Σ 组成封闭曲面，设 Ω 为该封闭曲面所围成的空间立体. 记 $P=x^2, Q=y^2, R=z^2$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2x, \frac{\partial Q}{\partial y}=2y, \frac{\partial R}{\partial z}=2z ,$$

由高斯公式

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v .$$

令

$$x=1+r\sin\theta\cos\varphi, y=1+r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$

则

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}(x-1)\mathrm{d}v+\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v+\iiint_{\Omega}(y+z)\mathrm{d}v$$

$$=0+\frac{8\pi}{3}+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1+r\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{19\pi}{6},$$

又因为 $\iint_{\Sigma_0}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-2\pi$，因此原式$=2\pi+2\cdot\frac{19\pi}{6}=\frac{25\pi}{6}$.

13.3.19　（1）不妨设 S 取其外侧，将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2，并在靠近 Σ_1 的一侧作简单光滑曲面 S_0，使得 S_0 分别与 Σ_1^-、Σ_2 均形成简单光滑的封闭曲面并且包含原点，S_0 取其与 Σ_1^- 所围封闭曲面的外侧，则

$$\oiint_{S_0+\Sigma_1^-}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_{S_0+\Sigma_2}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

故

$$\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 .$$

（2）令 $P = xf(x), Q = -xyf(x), R = -\mathrm{e}^{2x}z$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f(x) + xf'(x), \frac{\partial Q}{\partial y} = -xf(x), \frac{\partial R}{\partial z} = -\mathrm{e}^{2x},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = f(x) + xf'(x) - xf(x) - \mathrm{e}^{2x} .$$

记 $x > 0$ 内的任意光滑简单闭曲面 Σ 所围的空间区域为 Ω，则由（1）及高斯公式得

$$0 = \oiint\limits_{\Sigma} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}(f(x) + xf'(x) - xf(x) - \mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}v ,$$

由 Ω 的任意性知

$$f(x) + xf'(x) - xf(x) - \mathrm{e}^{2x} = 0 .$$

即 $f'(x) - (x-1)f(x) = \mathrm{e}^{2x}$，该一阶线性非齐次微分方程的通解为

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{x}}{x} .$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{x}}{x} = 1$ 得 $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{x} = 0$，即 $C = -1$，故 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{x}\ (x > 0)$.

13.3.20　由于

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} = v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} - \left(v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} ,$$

记 L 为 D 的边界，取正向，由格林公式

$$I = \iint\limits_{D} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \oint_L uv\mathrm{d}x + uv\mathrm{d}y$$

$$= \oint_L y\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta = -\pi .$$

13.3.21　设球半径为 R，质点到球心的距离为 $a\ (a > R)$，以球心为坐标原点建立空间直角坐标系，球壳方程为 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，不妨设质点的坐标为 $(0,0,a)$，质量为 1.

球壳对质点的引力设为 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$，由于质点在 z 轴，而 Σ 分别关于 xOz 面和 yOz 面对称，故 $F_x = F_y = 0$，由球坐标变换：

$$\Sigma: x = R\sin\theta\cos\varphi, y = R\sin\theta\sin\varphi, z = R\cos\theta, (0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi) ,$$

且 $\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，设 Σ 在 xOy 面上的投影为 D，因此

$$F_z = \iint\limits_{\Sigma} \frac{G\rho(z-a)}{(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}}\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} \frac{G\rho(R\cos\theta - a)}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}} R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= G\rho R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{R\cos\theta - a}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= -2\pi G\rho R^2\int_0^{\pi}\frac{R\cos\theta - a}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\cos\theta .$$

记 $I_1=\int_0^{\pi}\frac{R\cos\theta-a}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\cos\theta$，令 $u=\cos\theta$，则

$$I_1=\int_1^{-1}\frac{Ru-a}{(R^2+a^2-2aRu)^{3/2}}\mathrm{d}u\ .$$

又令 $t=R^2+a^2-2aRu$，则

$$I_1=\int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2}\frac{\frac{R^2+a^2-t}{2a}-a}{t^{3/2}}\left(-\frac{1}{2aR}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4a^2R}\int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{R^2-a^2}{t^{3/2}}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{a^2}\ .$$

得 $F_z=-4\rho G\frac{\pi R^2}{a^2}$，故

$$F=\left(0,0,-4\rho G\frac{\pi R^2}{a^2}\right).$$

此引力相当于一个质量为 $4\pi\rho R^2$ 的质点位于原点时对处于位置 $(0,0,a)$ 处的质点的吸引力，其中取 z 轴正向为力的方向.

13.3.22　设 $S=\varSigma_1+\varSigma_2$,其中 $\varSigma_1:z=\sqrt{x^2+y^2},(0\leqslant z\leqslant 1)$，取下侧；$\varSigma_2:z=1,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1$，取上侧. $\varSigma_1$ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$，$\varSigma_2$ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，则所求通量为

$$\begin{aligned}\iint_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S&=\iint_{\varSigma_1}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}S+\iint_{\varSigma_2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2\mathrm{d}S=\iint_{\varSigma_1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-z\right)\mathrm{d}S+\iint_{\varSigma_2}\mathrm{d}S\\&=0+\pi=\pi.\end{aligned}$$

第二十四届北京市大学生数学竞赛试题
（经济管理类）

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

（1）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$____________.

（2）设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-1 & x<0\\ x+a & 0\leqslant x<1\\ 1+b\sin(x-1) & x\geqslant 1\end{cases}$ 在点 $x=0$，$x=1$ 处可导，则参数 a 与 b 的和 $a+b=$__________.

（3）设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin(x^4)$，则高阶导数 $f^{(2013)}(0)=$____________.

（4）将 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在区间 $[0,x]\ (x>0)$ 上应用拉格朗日定理得 $\mathrm{e}^x-1=x\mathrm{e}^{\theta x}\ (0<\theta<1)$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$____________.

（5）设函数 $f(x)$ 是一个非负的连续函数，且满足方程 $f(x)f(-x)=1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x=$___________.

（6）二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(4-5\sin x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$___________.

（7）使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi\sqrt{n+1}-n\pi)}{n^x}$ 收敛的 x 的取值范围是___________.

（8）若方程 $\Phi(x,y,z)=0$ 可以确定隐函数 $x=x(y,z)$, $y=y(x,z), z=z(x,y)$，则乘积 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=$___________.

（9）微分方程初值问题 $xy(1+x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$，$y(1)=0$ 的解是___________.

（10）已知 $\mathrm{d}f(x,y)=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\mathrm{d}y$，则 $f(x,y)=$___________.

二、（本题 8 分）试求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)$.

三、（本题 10 分）设半径为 r 的圆与某条直线 l 相切，切点为 O，过圆上的一点 P 作切线 l 的垂线，垂足为 Q．试求由点 P、Q 及切点 O 所构成的三角形的最大面积.

四、（本题 10 分）试求函数 $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)\quad(x,y>0)$ 的极值.

五、（本题 12 分）判断无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 的收敛性，其中 $x>0$.

六、（本题 10 分）设 D 是由 $y=x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，$y=-x^2\ (-1\leqslant x\leqslant 0)$，$y=1$ 及 $x=-1$ 所围成的平面区域，试求二重积分

$$I=\iint\limits_D x[1+\ln(y+\sqrt{1+y^2})\sin(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

七、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=0$，试证明：

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x\ .$$

八、（本题 12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，则

$$|f'(x)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}，\quad x\in[0,1]\ .$$

第二十五届北京市大学生数学竞赛试题（经济管理类）

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

（1）设函数 $f(x)=xe^x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{f^{(n)}(0)}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left[\dfrac{f^{(k)}(0)}{n}\right]=$________.

（2）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1/k}=$________.

（3）设 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且满足 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$________.

（4）积分 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\dfrac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=$________.

（5）设函数 $z=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，则混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{\pi}\right)$ 的值为________.

（6）$z=f(x,y)$ 具有二阶连续的偏导数，且满足 $f(x,2x)=x, f_x'(x,2x)=x^2, f_{xx}''=f_{yy}''$ 则二阶偏导数 $f_{xy}''(x,2x)=$________.

（7）二重积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

（8）设某微分方程的通解为 $(y-C_2)^2=4C_1x$，则该微分方程为________.

（9）第一象限的连续曲线 $y=f(x)$ 过原点 O，$C(x,y)$ 是曲线上的任意点，点 C 在 x 轴和 y 轴上的正投影点分别记为 A 和 B．如果曲边三角形 OBC 的面积总是矩形 $OACB$ 面积的三分之一，则 $f(x)=$________.

（10）设 $y=y_1(x), y=y_2(x)$ 是微分方程 $y'=P(x)y+Q(x)$ 的两个互异解，$y(x)$ 是该微分方程的任一解，则 $\dfrac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=$________.

二、（本题 8 分）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$ 处处可导，试确定参数 a,b 的值.

三、（本题 10 分）设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)(0<\theta<1)$，又二阶导数 $f''(x)$ 存在，且 $f''(x)\neq 0$，试求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$．

四、（本题 8 分）设函数 $z(x,y)$ 满足 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy}\\ z(1,y)=\sin y\end{cases}$，试求函数 $z(x,y)$．

五、（本题 12 分）计算二重积分 $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $r=\sin 2\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 所围成的区域（如图 1 所示）.

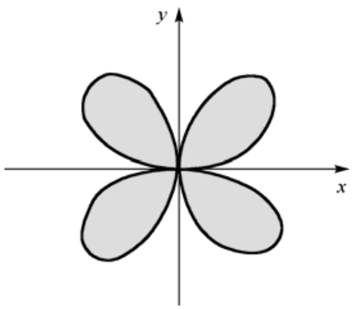

图 1

六、（本题 8 分）设 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(x)=f(1-x)$，求 $f(x)$.

七、（本题 12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}x^n$ 的收敛域.

八、（本题 12 分）已知两条直线 L_1：$y=px(p\neq 0)$和L_2：$y=-x+2$，过点 $(0,1)$ 作平行于 x 轴的直线，交直线 L_1 于点 A_1；过点 A_1 做平行于 y 轴的直线，交直线 L_2 于点 B_1；过点 B_1 做平行于 x 轴的直线，交直线 L_1 于点 A_2；过点 A_2 做平行于 y 轴的直线，交直线 L_2 于点 B_2；以此类推，得到点列 A_1，B_1，A_2，$B_2,\cdots$，A_n，$B_n,\cdots$, 如图 2 所示．试问 p 应满足什么条件时，点 A_n 的横坐标 a_n 构成的序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 有极限，并求此极限.

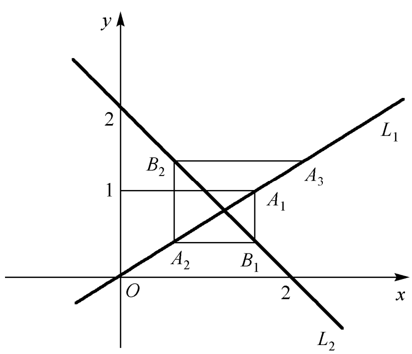

图 2

第五届全国大学生数学竞赛预赛试题
（非数学类）

一、解答下列各题（共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$．

2．证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的．

3．设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定．求 $y=y(x)$ 的极值．

4．过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$，求点 A 的坐标．

二、（本题 12 分）计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$．

三、（本题 12 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛．

四、（本题 10 分）设 $|f(x)|\leqslant\pi$，$f'(x)\geqslant m>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$，证明 $\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}$．

五、（本题 14 分）设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外．给定第二型的曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3-y)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3-z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值．

六、（本题 14 分）设 $I_a(r)=\int_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向．求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$．

七、（本题 14 分）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和．

第六届全国大学生数学竞赛预赛试题
（非数学类）

注意：本试卷共 6 大题，满分为 100 分，考试时间为 150 分钟.

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

（1）已知 $y_1=\mathrm{e}^x$ 和 $y_2=x\mathrm{e}^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该方程为________.

（2）设有曲面 $S:z=x^2+2y^2$ 和平面 $L:2x+2y+z=0$，则与 L 平行的 S 的切平面方程是________.

（3）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

（4）设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

（5）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$________.

二、（本题满分 12 分）设 n 为正整数，计算 $I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$.

三、（本题满分 14 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$. 证明：对任意 $x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}$.

四、（本题满分 14 分）（1）设一球缺高为 h，所在球半径为 R. 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$.

（2）设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$ 被平面 $P:x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω. 记球缺上的球冠为 $\sum$，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

五、（本题满分 15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $f^n(x_n)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

六、（本题满分 15 分）设 $A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$.

第二十四届北京市大学生数学竞赛试题（经济管理类）解答

一、填空题

（1）$\sqrt{\ln(1-x)}$；　（2）1；　（3）0；　（4）$\dfrac{1}{2}$；

（5）1；提示

$$原式=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{1+f(-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)\cos x}{f(x)+f(x)f(-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=1.$$

（6）$4\pi a^2$；　（7）$x>0$；　（8）-1；　（9）$(1+x^2)(1+y^2)=2x^2$；

（10）$\dfrac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+\dfrac{1}{3}y^3+C$.

二、使用拉格朗日中值定理．记 $f(x)=\arctan x$，则至少存在一点 ξ 介于 $\dfrac{a}{x}$ 和 $\dfrac{a}{x+1}$ 之间，使得

$$f\left(\frac{a}{x}\right)-f\left(\frac{a}{x+1}\right)=f'(\xi)\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right),$$

即有

$$\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right),$$

当 $x\to\infty$ 时，$\xi\to 0$．从而有

$$原极限=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\cdot\frac{a}{x(x+1)}=a.$$

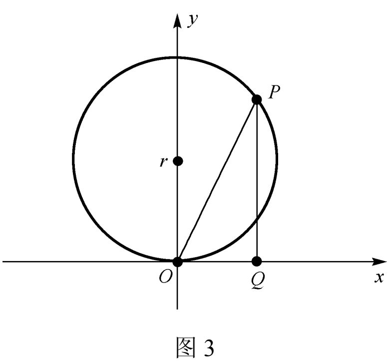

图 3

三、以切点 O 为坐标原点，切线 l 为 x 轴建立如图 3 所示的坐标系，此时圆的方程为

$$x^2+(y-r)^2=r^2.$$

设 P 点的坐标为 (x,y)，根据对称性，只需讨论点 P 位于右半圆上即可．三角形 ΔPOQ 的面积为 $\frac{1}{2}xy$．

由于

$$x=\sqrt{2ry-y^2}\text{，}\quad 0\leqslant y\leqslant 2r\text{，}$$

从而三角形 ΔPOQ 的面积可表示为 y 的函数 $f(y)$，且有

$$f(y)=\frac{y\sqrt{2ry-y^2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2ry^3-y^4}\text{，}\quad 0\leqslant y\leqslant 2r\text{，}$$

显然函数 $f(y)$ 在闭区间 $[0,2r]$ 上连续，因此一定存在最大值和最小值，又因为 $f(0)=f(2r)=0$，因此最大值一定在区间 $(0,2r)$ 内部取到．令 $f'(y)=\dfrac{6ry^2-4y^3}{4\sqrt{2ry^3-y^4}}=0$，解得唯一的驻点 $y=\dfrac{3r}{2}$．因此函数 $f(y)$ 在区间 $[0,2r]$ 上的最大值为 $f\left(\dfrac{3r}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}r^2$．

四、先求函数 $f(x,y)$ 的一阶偏导数，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\text{，}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\ln(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\text{，}$$

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，解得唯一驻点 $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$．再求函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数，得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\ln(x^2+y^2)+2-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}\text{，}$$

从而有

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1/\sqrt{2\mathrm{e}}\\ y=1/\sqrt{2\mathrm{e}}}}=2\text{，}\quad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1/\sqrt{2\mathrm{e}}\\ y=1/\sqrt{2\mathrm{e}}}}=0\text{，}\quad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1/\sqrt{2\mathrm{e}}\\ y=1/\sqrt{2\mathrm{e}}}}=2\text{，}$$

由于 $AC-B^2=2\cdot 2-0=4>0$，且 $A=2>0$，因此故函数 $f(x,y)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$ 处取得极小值，极小值为 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$．

五、记

$$u_n(x)=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\text{，}$$

注意到

$$u_n(x)=\frac{(1+x^n)-1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$
$$=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})}-\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)},$$

因此级数的前 n 项部分和 $S_n(x)$ 为

$$S_n(x)=\left(1-\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})}-\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\right)$$
$$=1-\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)},$$

因此当 $x>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=1$，级数收敛．当 $x=1$ 时，$S_n(1)=1-\dfrac{1}{2^n}$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(1)=1$，故级数亦收敛．

当 $0<x<1$ 时，记 $a_n(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$，由于对于任意的 $t>0$，均有 $1+t<\mathrm{e}^t$，因此

$$a_n(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)<\mathrm{e}^{x+x^2+\cdots+x^n}<\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}},$$

即对于固定的 $x\in(0,1)$，数列 $\{a_n(x)\}$ 有上界，又因为 $a_n(x)<a_{n+1}(x)$，因此数列 $\{a_n(x)\}$ 单调递增，由单调有界准则可知，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n(x)$ 存在．从而极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)$ 存在，故级数收敛．

综上所述，对于任意的 $x>0$，原级数收敛．

六、分析 被积函数 $f(x,y)=x+g(x,y)$，其中

$$g(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\sin(x^2+y^2)$$

关于 x 是奇函数，关于 y 也是奇函数．因此本题可以通过对积分区域进行分割，利用二重积分的对称性进行求解．

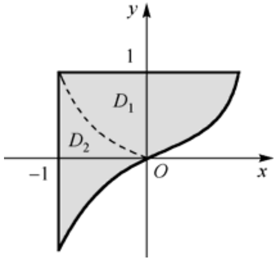

图 4

解 如图 4 所示，引入辅助线 $y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 0)$，将积分区域 D 分为两个区域：D_1 和 D_2，其中

$$D_1:\begin{cases}-\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}-x^2\leqslant y\leqslant x^2\\ -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases},$$

积分区域 D_1 关于 y 轴对称，积分区域 D_2 关于 x 轴对称，因此

$$I=\iint\limits_{D_1}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\iint\limits_{D_2}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=0+\iint\limits_{D_2}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0+0=2\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.$$

七、注意到 $f(a)=0$，则 $f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x$，记 $g(x)=\int_a^x |f'(x)|\mathrm{d}x$，则有

$$|f(x)|=\left|\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^x |f'(x)|\mathrm{d}x=g(x),$$

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)g'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}g^2(x)\bigg|_a^b$$

$$=\frac{1}{2}g^2(b)=\frac{1}{2}\left[\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x\right]^2=\frac{1}{2}\left[\int_a^b 1\cdot|f'(x)|\mathrm{d}x\right]^2,$$

由柯西—施瓦兹不等式可知

$$\left[\int_a^b 1\cdot|f'(x)|\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b 1^2|\mathrm{d}x\cdot\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x=(b-a)\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

因此有

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

注 本题的主要思路是在于通过放缩方法将积分 $\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x$ 的求解转化为积分 $\int_a^b g(x)g'(x)\mathrm{d}x$ 的求解.

八、对 $\forall x\in(0,1)$，由泰勒公式可得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2,\quad \xi_1\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2,\quad \xi_2\in(x,1)$$

两式相减，整理可得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$$

两边取绝对值可得

$$\begin{aligned}|f'(x)|&\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{x^2}{2}|f''(\xi_1)|+\frac{(1-x)^2}{2}|f''(\xi_2)|\\&\leqslant 2a+\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right]b\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}.\end{aligned}$$

下面证明在 $x=0$，$x=1$ 处的导数也满足关系式 $|f'(x)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$. 将 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处进行泰勒展开，则至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得

$$f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-0)^2,$$

因此有 $f'(0)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}f''(\eta)$，从而有 $|f'(0)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$，类似方法可以证明 $|f'(1)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$. 综上，结论得证.

第二十五届北京市大学生数学竞赛试题（经济管理类）解答

一、填空题

（1）1；**提示**　由于

$$f(x)=x\mathrm{e}^x=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

根据泰勒展开的唯一性可知，$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}$，故 $f^{(n)}(0)=n$，$f^{(k)}(0)=k$．因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f^{(n)}(0)}\sum_{k=1}^{n}f\left[\frac{f^{(k)}(0)}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=1.$$

（2）$\dfrac{1}{\ln 2}$；**提示**　显然

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1/k}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}},$$

结合夹逼定理和定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1/k}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}.$$

（3）$\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\dfrac{\pi^2}{2}$；**提示**　由于定积分是一个常数，故设 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=A$，从而

$$f(x)\sin x=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+A\sin x.$$

等式两边同时取定积分得 $A=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+A\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$．而 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$，故

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\times\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2},$$

因此

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}.$$

（4）$\dfrac{\pi+2}{8}$；**提示**　显然

$$I=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{e^x\cdot\cos^2 x}{1+e^x}dx .$$

令 $t=-x$，则

$$I=-\int_{\pi/4}^{-\pi/4}\frac{\cos^2 t}{1+e^t}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2 x}{1+e^x}dx .$$

故

$$2I=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{(1+e^x)\cdot\cos^2 x}{1+e^x}dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 x dx=\frac{\pi+2}{4} .$$

从而 $I=\dfrac{\pi+2}{8}$.

（5）$\left(\dfrac{\pi}{e}\right)^2$；

（6）$\dfrac{5x}{3}$；**提示** 等式 $f(x,2x)=x$ 两边同时对 x 求导数得

$$f_x'(x,2x)+2f_y'(x,2x)=1 .$$

解得 $f_y'(x,2x)=\dfrac{1}{2}(1-x^2)$. 等式 $f_x'(x,2x)=x^2$ 和 $f_y'(x,2x)=\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 分别对 x 求导数得

$$f_{xx}''(x,2x)+2f_{xy}''(x,2x)=2x，\quad f_{yx}''(x,2x)+2f_{yy}''(x,2x)=-x .$$

由题意 $f_{xx}''=f_{yy}''$， $f_{yx}''=f_{xy}''$，解得 $f_{xy}''(x,2x)=\dfrac{5x}{3}$.

（7）$\dfrac{4}{3}$；**提示** 根据二重积分的对称性，有

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)dxdy=2\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}|x|dxdy=8\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy=\frac{4}{3} .$$

（8）$2xy''+y'=0$；

（9）cx^2，其中 c 为任意常数；**提示** 由题意 $3\int_0^x ydx=xy$，等式两边求导得 $3y=y+xy'$. 求解微分方程可得 $f(x)=cx^2$，其中 c 为任意常数.

（10）C，其中 C 为任意常数.

二、由题意

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}=\begin{cases}ax+b & x<1\\ \dfrac{a+b+1}{2} & x=1\\ x^2 & x>1\end{cases} .$$

由于 $f(x)$ 处处可导，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，连续. 故

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)，\quad f_-'(1)=f_+'(1) .$$

从而 $\dfrac{a+b+1}{2}=a+b$，解得 $a+b=1$，即 $f(1)=1$．又因为

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a\ ,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2\ ,$$

故 $a=2$，$b=-1$．

三、当 $h\to 0$ 时，利用泰勒展开，有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)\ ,\quad 0<\theta_1<1\ ,$$

又因为

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\ ,$$

两式相减，整理得到

$$h[f'(x+\theta h)-f'(x)]=\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)\ ,$$

从而有

$$\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{\theta h}\cdot\theta=\frac{1}{2}f''(x)+o(1)\ .$$

结合二阶导数的定义，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{\theta h}\cdot\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}f''(x)+\lim_{h\to 0}o(1)\ ,$$

即

$$f''(x)\cdot\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}f''(x)\ .$$

由题设，$f''(x)\neq 0$，因此有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$．

四、方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$ 两边对 x 求积分，得到

$$z(x,y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+C(y)\ .$$

又因为 $z(1,y)=\sin y$，故

$$\sin y=-\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-y|+C(y)\ ,$$

解得

$$C(y)=2\sin y+\frac{1}{y}\ln|1-y|\ .$$

故

$$z(x,y)=(2-x)\sin y+\frac{1}{y}\ln\left|\frac{1-y}{1-xy}\right|\ .$$

五、设 D_1 为区域 D 在第一象限的部分，根据对称性，有

$$\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin 2\theta} r^2\sin\theta\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin 2\theta} r^3\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\sin^4 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 2\theta\mathrm{d}(2\theta) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^5 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{4\times 2}{5\times 3\times 1} = \frac{4}{15}.$$

六、方程 $f'(x) = f(1-x)$ 两边对 x 求导数得

$$f''(x) = -f'(1-x) = -f(x),$$

即有 $f''(x) + f(x) = 0$．方程的通解为

$$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数．故 $f'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x$．注意到 $f'(1) = f(0)$，可得

$$-C_1\sin 1 + C_2\cos 1 = C_1,$$

解得 $C_2 = \dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}C_1 = (\sec 1 + \tan 1)C_1$．故

$$f(x) = C[\cos x + (\sec 1 + \tan 1)\sin x],$$

其中 C 为任意常数．

七、显然幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}x^n$ 的收敛半径大于 0，设级数的和函数为 $S(x)$，即 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}x^n$．在收敛区间内，有

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\sin n}{n}x^{n-2}.$$

显然当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-2}$ 绝对收敛，而

$$\left|\frac{(n-1)\sin n}{n}x^{n-2}\right| \leqslant |x^{n-2}|,$$

由比较判别法可知，当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)\sin n}{n}x^{n-2}$ 绝对收敛．而当 $x=1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)\sin n}{n}$ 极限不存在，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)\sin n}{n}$ 发散．由 Abel 定理可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)\sin n}{n}x^{n-2}$ 的收敛半径 $R=1$．从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}x^n$ 的收敛半径 $R=1$．又因为当 $x=1$ 时，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 收敛，当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}(-1)^n$ 收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$

八、如图 5 所示.

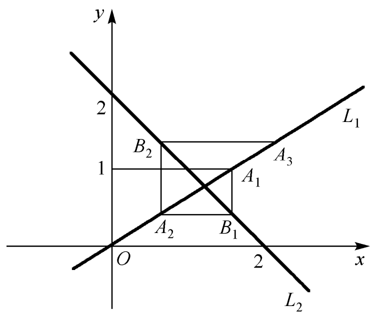

图 5

设点 A_n 的坐标为 (a_n,b_n)，因为线段 $A_{n-1}B_{n-1}$ 平行于 y 轴，因此 B_{n-1} 的坐标为 $(a_{n-1},2-a_{n-1})$．又因为线段 A_nB_{n-1} 平行于 x 轴，所以点 A_n 的坐标为 $\left(\frac{2-a_{n-1}}{p},2-a_{n-1}\right)$．由此可以得到

$$a_n=\frac{2-a_{n-1}}{p}=\frac{2}{p}-\frac{1}{p}a_{n-1}.$$

又因为 A_1 的坐标为 $\left(\frac{1}{p},1\right)$，故

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{p}-\frac{1}{p}a_{n-1}=\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{(-1)^2}{p^2}a_{n-2}\\&=\frac{2}{p}\left[1-\frac{1}{p}+\frac{(-1)^2}{p^2}\right]+\frac{(-1)^3}{p^3}a_{n-3}=\cdots\\&=\frac{2}{p}\left[1-\frac{1}{p}+\frac{(-1)^2}{p^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{p^{n-2}}\right]+\frac{(-1)^{n-1}}{p^{n-1}}a_1\\&=\frac{2}{p}\cdot\frac{1-\frac{(-1)^{n-1}}{p^{n-1}}}{1+\frac{1}{p}}+\frac{(-1)^{n-1}}{p^n}.\end{aligned}$$

当 $-1<-\frac{1}{p}<1$，即 $p<-1$ 或 $p>1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{1+p}.$$

由题设可知，当 $p=1$ 时，点 A_1，B_1，A_2，$B_2,\cdots$，A_n，$B_n,\cdots$ 均重合于一点 $(1,1)$，此时 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$．综上当即 $p<-1$ 或 $p\geqslant 1$ 时，有序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 有极限，且极限值为 $\frac{2}{1+p}$．

第五届全国大学生数学竞赛预赛试题（非数学类）解答

一、1．因为

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left[\pi(\sqrt{1+4n^2}-2n)\right]=\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n},$$

结合连续函数的性质以及等价无穷小量替换，有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\cdot\ln\left(1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]=e^{\frac{\pi}{4}}.$$

2．记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$，只要证明正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 不绝对收敛．

结合函数 $|\sin x|$ 的周期性，有

$$a_n\geqslant\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx=\frac{1}{\pi(n+1)}\int_0^{\pi}|\sin x|dx=\frac{2}{\pi(n+1)},$$

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，正项级数的比较判别法可知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，从而结论得证．

3．方程两边对 x 求导数，将 y 视为 x 的函数，得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0,$$

因此 $y'=\frac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令 $y'=0$，得 $x=0$ 或 $x=-2y$．将 $x=0$ 和 $x=-2y$ 分别代入原方程，得

$$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases},\quad\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases},$$

又因为

$$y''=\frac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)+(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2},$$

且 $y''\big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=-1<0$，$y''\big|_{\substack{x=-2\\y=1}}=1>0$，因此函数 $y=y(x)$ 的极大值为 $y(0)=-1$，极小值为 $y(-2)=1$．

4．如图 6 所示，设切点 A 的坐标为 $(x_0,\sqrt[3]{x_0})$，曲线过 A 点的切线方程为

$$y-\sqrt[3]{x_0}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_0^2}}(x-x_0)\,,$$

令 $y=0$，解得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x=-2x_0$，所以平面图形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_0}\cdot 3x_0-\int_0^{x_0}\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}(x_0)^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\,,$$

因此 $x_0=1$，所以 A 的坐标为 $(1,1)$.

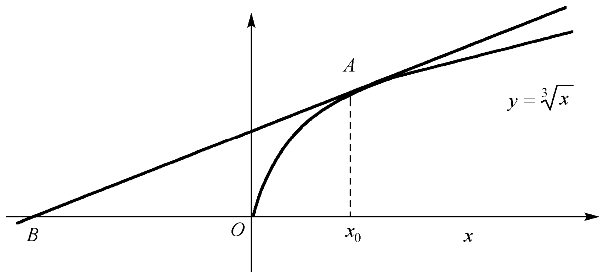

图 6

二、$$I=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^{-x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}(\arctan \mathrm{e}^x+\arctan \mathrm{e}^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{8}\,.$$

三、由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，因此

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0\,,\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x)}{x-0}=0\,,$$

结合洛必达法则和二阶导数的定义，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0)\,.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|,$$

而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据正项级数的比较判别法的极限形式可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛收敛.

四、因为当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增，从而存在反函数．令 $t=f(x)$，其反函数记为 $x=\varphi(t)$，又记 $\alpha=f(a)$，$\beta=f(b)$，由于 $|f(x)|\leqslant\pi$，因此 $-\pi\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$，利用第二类换元积分法，有

$$\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(y)} \int_\alpha^\beta \sin t\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

由于当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f'(x)\geqslant m>0$，因此 $0<\phi'(t)=\dfrac{1}{f'(x)}\leqslant\dfrac{1}{m}$，所以

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_\alpha^\beta \sin t\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^\pi \sin t\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{m}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{m}.$$

注 在求解不定积分时，一个非常重要的思想是复合函数的积分需要利用第二类换元积分法求解，本题即属于该类型．

五、记 Σ 围成的空间区域为 Ω，由高斯公式得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+6y^2+9z^2-3)\,\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

为了使得 I 达到最小，就要求 Ω 是使得 $x^2+2y^2+3z^2-1\leqslant 0$ 对应的最大空间区域，即

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+2y^2+3z^2-1\leqslant 0\right\}.$$

所以 Ω 是一个椭球，而 Σ 是椭球 Ω 的表面，此时积分 I 达到最小．为求解方便，作变换

$$\begin{cases} x=u \\ y=v/\sqrt{2}, \\ z=w/\sqrt{3} \end{cases}\quad 则\ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

因此

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(u^2+v^2+w^2-1)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

使用球坐标变换，有

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi.$$

注 由于 Σ 是一个光滑封闭曲面，因此可以考虑使用高斯公式，将第二类曲面积分问题转化为三重积分的计算问题．

六、作变换 $\begin{cases} x=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}} \end{cases}$，则曲线 C 变为 uOv 平面上的曲线 $\Gamma:\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{1}{2}v^2=r^2$，也是取正向，且有

$$x^2+y^2=u^2+v^2,\quad y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v,$$

因此 $I_a(r)$ 化为

$$I_a(r)=\int_\Gamma \frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^a}.$$

令 $u=\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\cos\theta$， $v=\sqrt{2}\,r\sin\theta$， $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ ，从而

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\cdot J_a,$$

其中 $J_a=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}$ ，显然 $0<J_a<+\infty$ ．因此当 $a>1$ 时， $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=0$;

当 $a<1$ 时， $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=-\infty$ ． 当 $a=1$ 时，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta+3\sin^2\theta}=3\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta+3\sin^2\theta}=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{1+3\tan^2\theta}=6\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+3t^2}=\sqrt{3}\pi.$$

故所求极限为

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}-\infty & a<1\\ -2\pi & a=1\\ 0 & a>1\end{cases}.$$

七、**分析**　根据第 2 章习题 2.3.4 的结果可知，表达式 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 与 $\ln n$ 是同阶无穷大，因此，根据正项级数的比较判别法容易证明该级数收敛.

解　（1）判别级数的敛散性.

解法 1　记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$， $u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，当 n 充分大时，有

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n<\sqrt{n},$$

所以

$$u_n\leqslant\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{3/2}},$$

而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，由正项级数的比较判别法可知，原级数收敛.

解法 2　由第 2 章习题 2.3.4 的结果可知， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}\cdot n^{\frac{3}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}\cdot\frac{n^{\frac{3}{2}}\cdot\ln n}{(n+1)(n+2)}=0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，由正项级数的比较判别法的极限形式可知，原级数收敛.

（2）设 $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$， $k=1,2,3,\cdots$， S_n 为级数的前 n 项部分和，则

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)\\&=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{n+2}a_n\\&=\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n\end{aligned}$$

因为 $0<a_n<1+\ln n$，所以 $0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$，由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$，因此有 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$.

第六届全国大学生数学竞赛预赛试题（非数学类）解答

一、填空题

（1）$y''-2y'+y=0$；**提示**　由题意，微分方程对应的特征方程具有二重根$r=1$，故所求的微分方程为$y''-2y'+y=0$．

（2）$2x+2y+z+\dfrac{3}{2}=0$；**提示**　设$P_0(x_0,y_0,z_0)$为S上的一点，则S在P_0的切平面方程为

$$-2x_0(x-x_0)-4y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0.$$

由于该切平面与平面L平行，因此$(-2x_0,-4y_0,1)$平行于$(2,2,1)$，故有

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-4y_0}{2}=\frac{1}{1},$$

解得$x_0=-1$，$y_0=-\dfrac{1}{2}$，且$z_0=\dfrac{3}{2}$．因此切平面方程为$2x+2y+z+\dfrac{3}{2}=0$．

（3）3；

（4）1；**提示**　$x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]=1-\frac{1}{(n+1)!}$．

（5）2；**提示**　由于

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}=\mathrm{e}^3,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=1+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=3,$$

故$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$．

二、由题意

$$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln x)\right|\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln x)\right|\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\frac{1}{x}\left|\sin(\ln x)\right|\mathrm{d}x.$$

令$u=\ln x$，则当$x=\mathrm{e}^{-2n\pi}$时，$u=-2n\pi$，当$x=1$时，$u=0$，故根据周期函数的性质有

$$I=\int_{-2n\pi}^{0}|\sin u|\,\mathrm{d}u=4n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,\mathrm{d}u=4n.$$

三、对$\forall x\in(0,1)$，由泰勒公式可得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''\left(\xi_1\right)(0-x)^2,\quad \xi_1\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''\left(\xi_2\right)(1-x)^2,\quad \xi_2\in\left(x,1\right)$$

两式相减，整理可得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{x^2}{2}f''\left(\xi_1\right)-\frac{1}{2}f''\left(\xi_2\right)(1-x)^2$$

两边取绝对值可得

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right|&\leqslant\left|f(1)\right|+\left|f(0)\right|+\frac{x^2}{2}\left|f''(\xi_1)\right|+\frac{(1-x)^2}{2}\left|f''(\xi_2)\right|\\&\leqslant 2A+\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right]B\\&\leqslant 2A+\frac{B}{2}.\end{aligned}$$

下面证明在 $x=0$， $x=1$ 处的导数也满足关系式 $\left|f'(x)\right|\leqslant 2A+\dfrac{B}{2}$．将 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处进行泰勒展开，则至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得

$$f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-0)^2,$$

因此有 $f'(0)=f(1)-f(0)-\dfrac{1}{2}f''(\eta)$，从而有 $\left|f'(0)\right|\leqslant 2A+\dfrac{B}{2}$，类似方法可以证明

$$\left|f'(1)\right|\leqslant 2A+\frac{B}{2}.$$

综上，结论得证．

注 本题也是 2013 年北京市数学竞赛考题．

四、如图 7 所示．设球缺所在球体的表面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，球缺的中心线为 z 轴，且设球缺所在圆锥顶角为 2α，球缺在 xOy 平面的投影区域为 Ω，则球缺的体积为

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_{R-h}^{R}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{R-h}^{R}(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

记 Σ 为球冠所围成的区域， D_{xy} 为 Σ 在 xOy 平面上的投影，则

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-(R-h)^2\}.$$

由于 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，因此

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

故球冠的面积为

$$S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=-2\pi R\int_0^{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}\frac{1}{2\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}(R^2-\rho^2)=2\pi Rh.$$

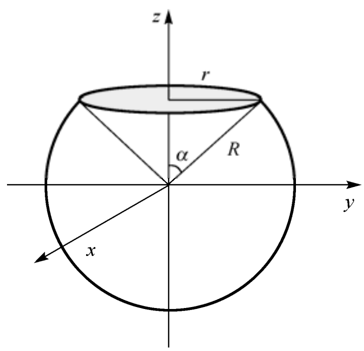

图 7

（2）记 Σ_1 为球缺底面圆，方向指向球缺外部，并记 $J=\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则由高斯公式可知

$$I+J=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}v=3V\text{，}$$

其中 V 为球缺的体积．球缺底面圆 Σ_1 的正向单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，故

$$J=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma_1}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{6}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}S=-\frac{6}{\sqrt{3}}S\text{，}$$

这里 S 为底面圆 Σ_1 的面积．故 $I=3V-J=3V+\frac{6}{\sqrt{3}}S$．

由题意，球心在点 $(1,1,1)$ 处，球缺底面圆 Σ_1 的圆心在 $(2,2,2)$ 处，球缺的顶点在 $(3,3,3)$ 处，球缺高度 $h=\sqrt{3}$，球体的半径 $R=2\sqrt{3}$，球缺底面圆 Σ_1 的半径 $r=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=3$，因此结合（1）可知

$$I=3V+\frac{6}{\sqrt{3}}S=3\times\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi r^2=33\sqrt{3}\pi\text{．}$$

五、由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，因此对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$f(b-\varepsilon)<f\left(b-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(b-\varepsilon)}{f\left(b-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]^n=0\text{．}$$

由极限的定义可知，对于上述的$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得当$n>N$时，有

$$\frac{f^n(b-\varepsilon)}{f^n\left(b-\frac{\varepsilon}{2}\right)}<\frac{1}{(b-a)}\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

故

$$f^n(b-\varepsilon)<\frac{1}{(b-a)}\cdot\frac{\varepsilon}{2}f^n\left(b-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{1}{(b-a)}\int_{b-\frac{\varepsilon}{2}}^{b}f^n(x)\mathrm{d}x$$

$$<\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x=f^n(x_n),$$

从而有$b-\varepsilon<x_n$，显然$x_n\leqslant b$，由ε的任意性可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$.

六、根据定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

记$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x_i=\dfrac{i}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right]=\lim_{n\to\infty}n\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_i)]\mathrm{d}x\right\}.$$

根据积分中值定理，存在$\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，使得$f(x)-f(x_i)=f'(\xi_i)(x-x_i)$．故

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x\right].$$

记$f'(x)$在区间$[x_{i-1},x_i]$上的最小值和最大值分别为m_i和M_i，则$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x$介于$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x$和$M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x$之间．故存在一点$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$，使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2=-\frac{1}{2n^2}f'(\eta_i).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}f'(\eta_i)\Delta x_i=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

参 考 文 献

[1] 吉米多维奇. 数学分析习题集. 北京：人民教育出版社，1978.

[2] 孙洪祥，王晓红. 高等数学难题解题方法选讲. 北京：机械工业出版社，2003.

[3] 毛京中. 高等数学竞赛与提高（第 2 版）. 北京：北京理工大学出版社，2004.

[4] 李心灿等. 大学生数学竞赛试题研究生入学考试难题解析选编. 北京：机械工业出版社，2005.

[5] 张朝凤，赵建华. 微积分习题课教程. 北京：高等教育出版社，2006.

[6] 刘强. 等价无穷小代换的再讨论. 高等数学研究，2010，14(1)：22-23.

[7] 华东师范大学数学系. 数学分析（第 4 版）. 北京：高等教育出版社，2010.

[8] 李晋明. 大学生数学竞赛指南. 北京：经济管理出版社，2011.

[9] 王丽萍. 历届 IMC 国际大学生数学竞赛试题集 1994-2010. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.

[10] 李康第，黄健雄. 高等数学考研与竞赛教程. 北京：科学出版社，2012.

[11] 北京市大学数学竞赛试题，1988-2016.

[12] 全国大学数学竞赛预赛、决赛试题，2009-2016.

[13] 蒲和平. 大学生数学竞赛教程. 北京：电子工业出版社，2014.

[14] 全国硕士研究生入学考试数学试题，2001-2015.

[15] 同济大学数学系. 高等数学上册（第 7 版）. 北京：高等教育出版社，2014.

[16] 同济大学数学系. 高等数学下册（第 7 版）. 北京：高等教育出版社，2014.

[17] 刘强，孙激流. 微积分同步练习与模拟试题. 北京：清华大学出版社，2015.

[18] 刘强，贾尚晖. 微积分复习指导与深化训练. 北京：电子工业出版社，2016.

[19] 刘强，袁安锋，孙激流. 高等数学（上册）同步练习与模拟试题. 北京：清华大学出版社，2016.

[20] 刘强，袁安锋，孙激流. 高等数学（下册）同步练习与模拟试题. 北京：清华大学出版社，2017.

反侵权盗版声明

举报电话：（010）88254396；（010）88258888

传　　真：（010）88254397

E-mail：　dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱

　　　　　电子工业出版社总编办公室

邮　　编：100036